UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PROCESSUS DE POISSON FILTRÉS, CHAÎNES DE MARKOV ET APPLICATIONS

JEAN-LUC GUILBAULT
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(MATÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)
AOÛT 2008

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-46103-7
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-46103-7

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

PROCESSUS DE POISSON FILTRÉS,

CHAÎNES DE MARKOV ET APPLICATIONS

présentée par : GUILBAULT Jean-Luc

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. ADJENGUE Luc D., Ph.D., président

M. LEFEBVRE Mario, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SAUCIER Antoine, Ph.D., membre

M. GARRIDO José, Ph.D., membre externe

Aux professeurs Mario Lefebvre et André Giroux

qui ont le plus influencé ma pensée mathématique.

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à mon directeur de recherche, monsieur Mario Lefebvre, sous la direction de qui il fut toujours agréable et enrichissant de travailler. Par la même occassion, qu'il me soit permis de remercier certains enseignants qui, au cours des dernières années, ont considérablement contribué à ma formation en mathématiques pures : messieurs André Giroux, Paul Gauthier et madame Véronique Gayrard du département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal. Qu'ils retrouvent tous ici l'expression de ma reconnaissance.

RÉSUMÉ

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$, un processus de Poisson homogène de taux $\lambda > 0$ et $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et indépendantes du processus $\{N(t), t \geq 0\}$. Le processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson filtré s'il admet la représentation suivante :

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} w\left(t, \tau_n, Y_n\right) \quad (X(t) = 0 \text{ si } N(t) = 0)$$

où $w(t, \tau, y)$ est une fonction de réponse, $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont les instants d'arrivée des événements dans l'intervalle $[0, t]$ et $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont les amplitudes des signaux qui leur sont associés. L'objectif vise à modéliser le débit d'un fleuve ou d'une rivière à partir de ce processus. Particulièrement, si $X(t)$ représente le débit d'un fleuve ou d'une rivière, une fonction de réponse qui semble appropriée à cette fin est donnée par

$$w\left(t, \tau_n, Y_n\right) = Y_n (t - \tau_n)^k e^{-(t-\tau_n)/c},$$

où les variables aléatoires $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont distribuées comme une variable aléatoire Y de loi exponentielle de paramètre μ, les paramètres c, λ et μ devant être estimés. Il appert que le modèle avec $k = 0$, généralement utilisé en hydrologie, est sensiblement amélioré, ce dernier modèle étant plus conforme à ce qui est observé sur les relevés hydrographiques. Le modèle est en outre utilisé pour prévoir le débit de ce même fleuve une journée suivant l'observation la plus récente du débit. Une application au fleuve Delaware, situé dans le nord-est des États-Unis, est faite.

Dans un second temps, est défini un processus stochastique dérivé du processus de Poisson filtré et qui consiste à ne considérer que le dernier événement s'étant produit dans l'intervalle $[0, t]$ plutôt que de considérer l'ensemble des événements dans cet intervalle. Des formules générales sont établies, entre autres des formules pour la moyenne et la variance à l'instant t. Particulièrement, le modèle avec la fonction de réponse ci-haut est ajusté au fleuve Delaware. L'espérance conditionnelle du débit, étant donné l'histoire du processus

dans l'intervalle $[0, t]$, est utilisée comme estimateur du débit le lendemain de l'observation la plus récente.

Dans la seconde partie de la présente thèse, une chaîne de Markov, considérée comme une discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et dont l'espace des états est $\{0, 1, \ldots, N\}$, est étudiée. Les probabilités de transition

$$p_{i,i+1} = \frac{1}{4}(1 - ci), \quad p_{i,i-1} = \frac{1}{4}(1 + ci) \quad \text{et} \quad p_{i,i} = \frac{1}{2},$$

où $c < 1/(N-1)$ est une constante, dépendent de l'état dans lequel se trouve le processus, p_{ij} étant la probabilité que le processus passe de l'état i à l'état j. La probabilité d'un endroit de premier passage, soit la probabilité que le processus atteigne la frontière N avant 0, est calculée. Ensuite, le même problème est résolu dans le cas où l'espace des états est $\{-M, \ldots, 0, \ldots, N\}$ et où les probabilités de transition peuvent varier selon que le processus est dans la partie positive ou négative de l'axe. Finalement, une expression pour le nombre moyen de transitions requises pour que le processus atteigne l'une ou l'autre des frontières, dans le cas où l'espace des états est $\{0, 1, \ldots, N\}$, est donnée.

ABSTRACT

Let $\{N(t), t \geq 0\}$ be a time homogeneous Poisson process with rate $\lambda > 0$, and $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables also independent of the process $\{N(t), t \geq 0\}$. The stochastic process $\{X(t), t \geq 0\}$ is a filtered Poisson process if it may be writen in the following way :

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} w(t, \tau_n, Y_n) \quad (X(t) = 0 \text{ if } N(t) = 0)$$

where $w(t, \tau, y)$ is a response function, $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ are the arrival times of the events of the Poisson process in the interval $[0, t]$ and $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ are the amplitudes of the signals. The aim is to model a river flow based on this process. Particularly, if $X(t)$ represents the river flow, a response function which seems to be appropriate to this end is given by

$$w(t, \tau_n, Y_n) = Y_n (t - \tau_n)^k e^{-(t-\tau_n)/c}$$

where the random variables $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ are distributed as the random variable Y which is assumed to be exponentially distributed with parameter μ, the parameters c, λ and μ having to be estimated. It appears that the model with $k = 0$, widely used in hydrology, is noticeably improved, the above model being more in agreement with what is observed in real-life hydrographs. Besides, the model is used to forecast the river flow one day after the latest observed flow. Application is made to the Delaware River data, located in the northeast of the United States.

Next, a stochastic process is defined from the filtered Poisson process. This process takes into account only the last event that occured in the interval $[0, t]$, rather than taking into account the whole set of the events in the same interval. General formulas are established, for the mean and the variance at time t among others. Particularly, the model with the above response function is fitted to the Delaware River data. The conditional expectation of the flow, given the history of the process in the interval $[0, t]$, is used as an estimator of the flow on the day following the latest observation.

In the second part of the present thesis, a Markov chain, with state space $\{0, 1, \ldots, N\}$ and which can be considered as a discrete version of the Ornstein-Uhlenbeck process, is studied. For this chain, the transition probabilities

$$p_{i,i+1} = \frac{1}{4}(1 - ci)\,, \quad p_{i,i-1} = \frac{1}{4}(1 + ci) \quad \text{and} \quad p_{i,i} = \frac{1}{2},$$

where $c < 1/(N-1)$ is a constant, depend on the current state of the process, p_{ij} being the probability that the process moves from state i to state j. A first hitting place probability, namely the probability that the process hits N before 0, is explicitly computed. Then, the same problem is solved when the state space is $\{-M, \ldots, 0, \ldots, N\}$ and when the transition probabilities may vary given that the state of the process is positive or negative. Finally, an expression for the average number of transitions required for the process to hit either one of the boundaries, in the case when the state space is $\{0, 1, \ldots, N\}$, is given.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

AVANT-PROPOS

Cette thèse, dont le sujet général porte sur les probabilités appliquées, comporte deux parties distinctes et séparées. Dans la première partie, un processus de Poisson filtré est utilisé afin de modéliser le débit d'un fleuve ou d'une rivière. Il s'agit donc de modélisation stochastique. Dans la seconde partie, une version discrète du processus d'Ornstein-Uhlenbeck est introduite. Des expressions pour la probabilité de l'endroit de premier passage ainsi que pour le nombre moyen de transitions requises pour atteindre l'une ou l'autre des frontières sont données. De ces travaux, quatre articles ont été tirés dont un est accepté pour publication dans la revue Applied Mathematical Modeling.

PREMIÈRE PARTIE

Le processus de Poisson filtré comme modèle pour le débit d'un fleuve

INTRODUCTION

Un processus stochatique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson filtré s'il admet, pour $t \geq 0$, la représentation suivante :

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} w(t, \tau_n, Y_n) \qquad (X(t) = 0 \text{ si } N(t) = 0)$$

où $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson homogène de taux λ, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et indépendantes du processus $\{N(t), t \geq 0\}$ tandis que $w(\cdot, \cdot, \cdot)$, la fonction de réponse, est une fonction à valeurs réelles. L'interprétation généralement admise des différentes variables est la suivante : si τ_n représente l'instant d'arrivée d'un événement, Y_n est l'amplitude du signal qui lui est associé et $w(t, \tau_n, Y_n)$ en est l'amplitude à un instant ultérieur t. $X(t)$ est ainsi la somme des signaux, à l'instant t, associés à chacun des événements se produisant à l'intérieur de l'intervalle $[0, t)$.

Les processus de Poisson filtrés furent utilisés dans de nombreuses applications (se référer à Parzen, 1962, p. 144). Particulièrement, Yoon et Kavvas (2003) ont proposé un processus de Poisson filtré pour modéliser les précipitations de pluie alors que Rahman et Grigoriu (1993) l'ont utilisé dans le cas des secousses sismiques.

L'objectif vise maintenant à modéliser le débit d'une rivière ou d'un fleuve. Il est raisonnable de penser que les fluctuations du débit d'une rivière sont la résultante des effets combinés de l'ensemble des signaux (des précipitations de pluie par exemple) sur l'intervalle de temps $[0, t]$ (Weiss, 1977). Différentes fonctions de réponse ont été proposées, par exemple Claps *et al.* (2005) et Murrone *et al.* (1997) ont considéré une combinaison linéaire de fonctions delta de Dirac et de fonctions exponentielles.

Une fonction de réponse largement utilisée en hydrologie est donnée par

$$w\left(t, \tau_n, Y_n\right) = Y_n e^{-(t-\tau_n)/c}$$

où c est un paramètre positif à estimer (Weis, 1977 ; Koch, 1985 ; Konecny, 1992 ; Seidou *et al.* 2002). Particulièrement, Lefebvre *et al.* (2003) ont utilisé ce modèle pour prévoir les sommets du débit du fleuve Delaware aux États-Unis, lequel modèle fut par la suite amélioré par Lefebvre (2005 a). Toutefois, les sommets successifs du débit d'une rivière ou d'un fleuve étant faiblement corrélés, il est difficile de prévoir de façon précise l'occurrence de ces différents sommets. Une telle fonction de réponse peut cependant s'avérer efficace pour prévoir le débit d'une rivière à court terme. Selon ce modèle, si à un instant τ_n un événement de précipitation survient, l'accroissement du débit de la rivière correspondant sera Y_n et cet accroissement sera instantané. À un temps ultérieur $t \geq \tau_n$, l'effet résiduel de l'événement sera $Y_n e^{-(t-\tau_n)/c}$, c'est-à-dire que la décroissance dans le temps se fait de façon exponentielle alors que le maximum est atteint à l'instant τ_n. Or, en observant un relevé hydrographique, il appert que, de façon générale, l'accroissement du débit d'une rivière, suite à un événement, s'étale dans le temps avant d'atteindre un maximum pour ensuite décroître. Pour cette raison, le modèle suivant est proposé et sera l'objet d'étude du premier chapitre :

$$w\left(t, \tau_n, Y_n\right) = Y_n (t - \tau_n)^k e^{-(t-\tau_n)/c}, \tag{1}$$

où k est un paramètre positif devant être estimé.

Dans un premier temps, bien que le paramètre k puisse prendre une valeur quelconque dans l'intervalle $[0, +\infty)$, les cas particuliers où $k = 0$ et $k = 1$ seront étudiés de façon à mettre en évidence l'influence de ce paramètre sur le modèle. En outre, pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $\delta > 0$, une formule exacte de l'espérance conditionnelle $E\left[X(t+\delta)|A(t)\right]$ sera obtenue, où $A(t)$

dénote l'ensemble des τ_n et Y_n dans l'intervalle $[0, t]$, c'est-à-dire l'*histoire* du processus. Cette espérance conditionnelle servira d'estimateur pour le débit de la rivière à l'instant $t + \delta$. Les différents moments du processus seront aussi calculés, à savoir l'espérance, la variance ainsi que le coefficient de corrélation de $X(t)$ et $X(t + \delta)$. Une application des résultats au fleuve Delaware sera présentée.

Si le temps entre deux événements successifs est suffisamment long (et la constante c suffisamment petite), les événements antérieurs au plus récent peuvent être négligés. Il s'ensuit donc que

$$X(t) \simeq Y_{N(t)}(t - \tau_{N(t)})^k e^{-\left(t - \tau_{N(t)}\right)/c} \quad (X(t) = 0 \text{ si } N(t) = 0). \tag{2}$$

Dans le second chapitre, un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ dérivé du processus de Poisson filtré sera introduit. Si $w\,(t, \tau, y)$ est une fonction de réponse, alors le processus considéré sera défini comme suit :

$$X(t) = X(0) + w\left(t, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right), \quad t \geq 0,$$

$X(0)$ étant une variable aléatoire indépendante du processus $\{N(t), t \geq 0\}$. Des expressions générales pour les différents moments seront obtenues. Le cas particulier de la fonction (1) sera étudié et ajusté au fleuve Delaware. Il sera mis en évidence le fait que ce processus améliore grandement les prévisions.

CHAPITRE 1

LE PROCESSUS DE POISSON FILTRÉ

Dans ce chapitre, le processus de Poisson filtré avec la fonction de réponse définie en (1) est utilisé pour modéliser le débit d'un fleuve. Les différents paramètres sont ajustés au cas du fleuve Delaware.

1.1 Résultats théoriques

Les calculs qui concernent la modélisation du débit du fleuve Delaware s'appuient sur les propositions présentées dans cette section. La proposition 1 est une généralisation multidimensionnelle du cas bidimensionnel (se référer à Parzen, 1962, p. 153).

Proposition 1 *Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène de taux $\lambda > 0$ et $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et indépendantes du processus $\{N(t), t \geq 0\}$. Alors, pour tout ensemble de points $t_m > t_{m-1} > \ldots > t_1 \geq t_0 = 0$, $m \geq 1$, et pour tout nombre réel $\{u_j\}_{j=1,\ldots,m}$, le processus de Poisson filtré $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} w(t, \tau_n, Y_n)$ admet pour fonction caractéristique conjointe la fonction*

$$\Phi_{X(t_1),\ldots,X(t_m)}(u_1, \ldots, u_m) = \left\{ \prod_{\vartheta=1}^{m} \exp\left(\int_{t_{\vartheta-1}}^{t_\vartheta} E\left[\prod_{j=\vartheta}^{m} e^{iu_j w(t_j,\tau,Y)} - 1 \right] d\tau \right) \right\}^{\lambda},$$

où Y est une variable aléatoire distribuée comme les variables Y_n.

Preuve. La fonction de réponse $w(t, \tau, y)$ peut être considérée comme prenant la valeur nulle pour tout instant t inférieur à τ, c'est-à-dire que

$$w(t, \tau, y) = 0 \text{ si } t < \tau.$$

Ainsi,

$$Z := \sum_{j=1}^{m} u_j X(t_j) = \sum_{i=1}^{N(t_m)} \sum_{j=1}^{m} u_j w\left(t_j, \tau_i, Y_i\right) = \sum_{i=1}^{N(t_m)} \Xi\left(\tau_i, Y_i\right),$$

où

$$\Xi\left(\tau, y\right) := \sum_{j=1}^{m} u_j w\left(t_j, \tau, y\right).$$

Pour obtenir une expression pour la fonction caractéristique conjointe, il suffit de conditionner sur le nombre d'événements se réalisant à l'intérieur de l'intervalle compact $[0, t_m]$. En définissant

$$\Phi_{X(t_1),\ldots,X(t_m)}\left(u_1, \ldots, u_m\right) := E\left[e^{iZ}\right],$$

$$\begin{aligned}\Phi_{X(t_1),\ldots,X(t_m)}\left(u_1, \ldots, u_m\right) \quad = \quad & \sum_{k=0}^{+\infty} E\left[e^{iZ}\middle| N(t_m) - N(0) = k\right] \\ & \times P\left[N(t_m) - N(0) = k\right]. \quad (3)\end{aligned}$$

Or, la distribution conjointe des instants $t_m \geq \tau_k > \tau_{k-1} > \ldots > \tau_1 > 0$ de réalisation des événements, connaissant le nombre k d'événements s'étant produits dans l'intervalle $[0, t_m]$, est celle de k variables ordonnées, indépendantes et uniformes sur l'intervalle $[0, t_m]$ (se référer, par exemple, à Lefebvre, 2005, p. 277 ou à Ross, 2003, p. 303).

Soit

$$\eta := E\left[e^{i\sum_{i=1}^{k}\Xi(\tau_i, Y_i)}\middle| N(t_m) - N(0) = k\right]$$

et $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leq t_m$ un ensemble points. Pour calculer l'espérance conditionnelle η, il suffit de conditionner sur l'événement $A = \{\tau_1 = s_1, \ldots, \tau_k = s_k\}$ et d'écrire d'abord

$$\begin{aligned}\eta\left(s_1, \ldots, s_k\right) &:= E\left[e^{i\sum_{i=1}^{k}\Xi(\tau_i, Y_i)}\middle| N(t_m) - N(0) = k, A\right] \\ &= E\left[e^{i\sum_{i=1}^{k}\Xi(s_i, Y_i)}\middle| N(t_m) - N(0) = k, A\right],\end{aligned}$$

laquelle équation peut être écrite, par indépendance,

$$\eta\left(s_1,\ldots,s_k\right)=\prod_{i=1}^{k} E\left[e^{i\;\Xi(s_i,Y_i)}\right].$$

En utilisant le fait que la fonction de densité conjointe des variables τ_i, sachant que k événements se sont réalisés dans l'intervalle $[0,t_m]$, est donnée par

$$f_{\tau_1,\ldots,\tau_k}\left(s_1,\ldots,s_k\right| N\left(t_m\right)=k)=\frac{k!}{t_m^k},$$

et considérant que la fonction $\eta\left(s_1,\ldots,s_k\right)$ est symétrique,

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_0^{t_m}\int_{s_1}^{t_m}\int_{s_2}^{t_m}\cdots\int_{s_{k-1}}^{t_m}\eta\left(s_1,\ldots,s_k\right) f_{\tau_1,\ldots,\tau_k}\left(s_1,\ldots,s_k\right) ds_1\ldots ds_k\\
&= \frac{1}{t_m^k}\int_0^{t_m}\cdots\int_0^{t_m}\eta\left(s_1,\ldots,s_k\right) ds_1\ldots ds_k.
\end{aligned}$$

Ainsi, si U est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0,t_m]$,

$$\begin{aligned}
E\left[e^{iZ}\right| N(t_m)-N(0)=k] &= E\left[\exp\left\{i\sum_{i=1}^{k}\Xi\left(\tau_i,Y_i\right)\right\}\middle| N(t_m)-N(0)=k\right]\\
&= E^k\left[e^{i\;\Xi(U,Y)}\right]=\left\{\frac{1}{t_m}\int_0^{t_m}E\left[e^{i\;\Xi(\tau,Y)}\right]d\tau\right\}^k.
\end{aligned}$$

Il suit de cette écriture, ainsi que de l'équation (3), que

$$\begin{aligned}
E\left[e^{iZ}\right] &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{t_m}\int_0^{t_m}E\left[e^{i\;\Xi(\tau,Y)}\right]d\tau\right)^k e^{-\lambda t_m}\frac{(\lambda t_m)^k}{k!}\\
&= e^{-\lambda t_m}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\lambda\int_0^{t_m}E\left[e^{i\;\Xi(\tau,Y)}\right]d\tau\right)^k\\
&= e^{-\lambda t_m}\exp\left(\lambda\int_0^{t_m}E\left[e^{i\;\Xi(\tau,Y)}\right]d\tau\right)\\
&= \exp\left(\lambda\int_0^{t_m}\left(E\left[e^{i\;\Xi(\tau,Y)}\right]-1\right)d\tau\right).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2 *Si* $E\left[w^2(t,\tau,Y)\right] < +\infty$*, alors*

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \lambda \int_0^t E[w(t,\tau,Y)]\,d\tau \\ Var[X(t)] &= \lambda \int_0^t E\left[w^2(t,\tau,Y)\right]d\tau \\ Cov[X(t_1),X(t_2)] &= \lambda \int_0^{\min(t_1,t_2)} E[w(t_1,\tau,Y)\,w(t_2,\tau,Y)]\,d\tau, \end{aligned}$$

où Y *est une variable aléatoire distribuée comme les variables* Y_n*.*

Preuve. La preuve est immédiate et découle du fait que les moments par rapport à l'origine sont donnés par

$$E[X^n(t_1)] = \frac{1}{i^n}\frac{d^n}{du_1^n}\Phi_{X(t_1)}(u_1)\bigg|_{u_1=0}$$

et par le fait que

$$Cov[X(t_1),X(t_2)] = \frac{1}{i^2}\,\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2}\Phi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2)\bigg|_{u_1=0,u_2=0}$$

où $\Phi_{X(t_1)}(u_1)$ est la fonction caractéristique univariée et $\Phi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2)$ la fonction caractéristique bivariée. ∎

Remarque 3 *Dans les formules présentées dans la proposition précédente, ainsi que dans son corollaire, seule* Y *est une variable aléatoire, laquelle suit la même loi que les variables* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, les amplitudes des signaux.*

À présent, soit la fonction de réponse introduite à l'équation (1). Par le corollaire 2,

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \lambda \int_0^t E\left[Y(t-\tau)^k e^{-(t-\tau)/c}\right]d\tau \\ &= \lambda E[Y] \int_0^t (t-\tau)^k e^{-(t-\tau)/c} d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Il ressort de cette égalité que la distribution exacte de la variable aléatoire Y n'est pas requise et que seule son espérance l'est. Toutefois, à l'instar de Lefebvre *et al.* (2003), celle-ci peut être considérée comme étant distribuée selon une loi exponentielle de paramètre μ. Ainsi,

$$E\left[X(t)\right] = \frac{\lambda}{\mu} \int_0^t (t-\tau)^k e^{-(t-\tau)/c} d\tau$$

et il suit de cette équation que (Gradshteyn et Ryzhik, 2000, p. 342)

$$E\left[X(t)\right] = \frac{\lambda}{\mu} c^{k+1} \gamma\left(k+1, \frac{t}{c}\right) \quad \text{si} \quad k > -1, \tag{5}$$

où $\gamma(\cdot, \cdot)$ est la fonction gamma incomplète, définie comme suit :

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad \text{si} \quad \Re(\alpha) > 0.$$

Particulièrement, lorsque k est un entier naturel, l'équation (5) se réduit à

$$E\left[X(t)\right] = \frac{\lambda}{\mu} c^{k+1} k! \left\{1 - e^{-t/c} \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} \left(\frac{t}{c}\right)^m \right\}, \tag{6}$$

puisque, sous cette condition (Gradshteyn et Ryzhik, 2000, p. 890),

$$\gamma(k+1, x) = k! \left[1 - e^{-x} \left(\sum_{m=0}^{k} \frac{x^m}{m!}\right)\right]. \tag{7}$$

Remarque 4 *En intégrant par parties l'équation (4), l'égalité (6) est directement obtenue.*

De la même façon, par le corollaire 2, et en considérant, lorsque la variable aléatoire Y est distribuée selon une loi exponentielle, que

$$E\left[Y^2\right] = Var\left[Y\right] + E^2\left[Y\right] = \frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{2}{\mu^2}$$

la variance de $X(t)$ est donnée par l'intégrale suivante :

$$Var\,[X(t)] = \frac{2\lambda}{\mu^2}\int_0^t (t-\tau)^{2k} e^{-2(t-\tau)/c} d\tau,$$

laquelle intégrale est donnée par (Gradshteyn et Ryzhik, 2000, p. 342)

$$Var\,[X(t)] = \frac{2\lambda}{\mu^2}\left(\frac{c}{2}\right)^{2k+1}\gamma\left(2k+1, \frac{2t}{c}\right) \quad \text{si} \quad k > -\frac{1}{2}.$$

En outre, lorsque $2k$ est un entier naturel, en vertu de l'équation (7) ou par intégration par parties, la variance est donnée par

$$Var\,[X(t)] = \frac{2\lambda}{\mu^2}\left(\frac{c}{2}\right)^{2k+1}(2k)!\left\{1 - e^{-2t/c}\sum_{m=0}^{2k}\frac{1}{m!}\left(\frac{2t}{c}\right)^m\right\}.$$

La proposition suivante est maintenant démontrée.

Proposition 5 *Dans le cas où Y est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre μ, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X(t)$ dont la fonction de réponse est donnée par l'équation (1) sont les suivantes :*

$$E\,[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu}c^{k+1}\gamma\left(k+1, \frac{t}{c}\right) \quad si \quad k > -1,$$

$$Var\,[X(t)] = \frac{2\lambda}{\mu^2}\left(\frac{c}{2}\right)^{2k+1}\gamma\left(2k+1, \frac{2t}{c}\right) \quad si \quad k > -\frac{1}{2}.$$

Particulièrement,

$$E\,[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu}c^{k+1}k!\left\{1 - e^{-t/c}\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\left(\frac{t}{c}\right)^m\right\}, \quad si\ k \in \mathbb{N},$$

$$Var\,[X(t)] = \frac{2\lambda}{\mu^2}\left(\frac{c}{2}\right)^{2k+1}(2k)!\left\{1 - e^{-2t/c}\sum_{m=0}^{2k}\frac{1}{m!}\left(\frac{2t}{c}\right)^m\right\}, \quad si \quad 2k \in \mathbb{N}.$$

Une expression pour la covariance de $X(t_1)$ et $X(t_2)$ est donnée dans la proposition qui suit.

Proposition 6 *Dans le même cas exponentiel, si $t_1 \leq t_2$, alors la covariance de $X(t_1)$ et $X(t_2)$ est la suivante :*

$$Cov\left[X(t_1), X(t_2)\right] = -\frac{\lambda}{\mu^2} c e^{-(t_1+t_2)/c} \left(t_1 t_2\right)^k \sum_{v=0}^{+\infty} c_v I_v \quad si \quad k \geq 0,$$

avec

$$c_v := \left(\frac{c}{2t_2}\right)^v \sum_{\gamma=0}^{v} \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^\gamma \binom{k}{\gamma} \binom{k}{v-\gamma},$$

$$I_v := v! \left[1 - e^{2t_1/c} \sum_{m=0}^{v} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{2t_1}{c}\right)^m\right].$$

Particulièrement, lorsque $k \in \mathbb{N}$, la somme infinie s'arrête à $2k$.

Preuve. Par le corollaire 2, la covariance de $X(t)$ est donnée, lorsque $t_1 \leq t_2$, par

$$Cov\left[X(t_1), X(t_2)\right] = \frac{2\lambda}{\mu^2} e^{-(t_1+t_2)/c} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - \tau)(t_2 - \tau)\right]^k e^{2\tau/c} d\tau.$$

La proposition est vraie lorsque $k = 0$. Pour $k > 0$ et par le théorème du binôme,

$$\begin{aligned}
\left[(t_1 - \tau)(t_2 - \tau)\right]^k &= \left[t_1 t_2 \left(1 - \frac{\tau}{t_1}\right)\left(1 - \frac{\tau}{t_2}\right)\right]^k \\
&= (t_1 t_2)^k \left\{\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \binom{k}{i} \left(\frac{\tau}{t_1}\right)^i\right\} \left\{\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{\tau}{t_2}\right)^j\right\} \\
&= (t_1 t_2)^k \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \tau^i \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \tau^j = (t_1 t_2)^k \sum_{v=0}^{+\infty} \left\{\sum_{\gamma=0}^{v} a_\gamma b_{v-\gamma}\right\} \tau^v,
\end{aligned}$$

où

$$a_i := \left(\frac{-1}{t_1}\right)^i \binom{k}{i} \quad \text{et} \quad b_j := \left(\frac{-1}{t_2}\right)^j \binom{k}{j},$$

et en considérant que

$$\binom{z}{w} = \frac{z!}{w!(z-w)!} = \frac{z\,(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-w+1)}{w!}.$$

Or, les séries $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\tau^i$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\tau^j$ convergent absolument sur l'intervalle $[0, t_1]$ lorsque $k > 0$ puisque

$$0 \leq \frac{\tau}{t_2} \leq \frac{\tau}{t_1} \leq 1.$$

La série produit de Cauchy converge donc aussi absolument sur ce même intervalle lorsque $k > 0$. Aussi, lorsque $k \in \mathbb{N}$, la série se réduit à une somme finie et dans ce cas,

$$[(t_1-\tau)(t_2-\tau)]^k = (t_1t_2)^k \sum_{\upsilon=0}^{2k} \left\{ \sum_{\gamma=0}^{\upsilon} a_\gamma b_{\upsilon-\gamma} \right\} \tau^\upsilon.$$

Il s'ensuit que

$$Cov\,[X(t_1), X(t_2)] = \frac{2\lambda}{\mu^2} e^{-(t_1+t_2)/c} (t_1t_2)^k \int_0^{t_1} \sum_{\upsilon=0}^{+\infty} \vartheta_\upsilon \tau^\upsilon e^{2\tau/c} d\tau,$$

où

$$\vartheta_\upsilon = \sum_{\gamma=0}^{\upsilon} a_\gamma b_{\upsilon-\gamma} = (-1)^\upsilon \sum_{\gamma=0}^{\upsilon} \frac{1}{t_1^\gamma t_2^{\upsilon-\gamma}} \binom{k}{\gamma} \binom{k}{\upsilon-\gamma}.$$

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, lorsque $k > 0$,

$$\begin{aligned} Cov\,[X(t_1), X(t_2)] &= \frac{2\lambda}{\mu^2} e^{-(t_1+t_2)/c} (t_1t_2)^k \sum_{\upsilon=0}^{+\infty} \vartheta_\upsilon \int_0^{t_1} \tau^\upsilon e^{2\tau/c} d\tau \\ &= \frac{2\lambda}{\mu^2} e^{-(t_1+t_2)/c} (t_1t_2)^k \sum_{\upsilon=0}^{+\infty} \vartheta_\upsilon (-1)^{\upsilon+1} \left(\frac{c}{2}\right)^{\upsilon+1} \gamma\left(\upsilon+1, -\frac{2}{c}t_1\right) \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned} Cov\,[X(t_1), X(t_2)] &= \frac{2\lambda}{\mu^2} e^{-(t_1+t_2)/c} (t_1t_2)^k \sum_{\upsilon=0}^{+\infty} \vartheta_\upsilon (-1)^{\upsilon+1} \left(\frac{c}{2}\right)^{\upsilon+1} \\ &\quad \times \upsilon! \left[1 - e^{2t_1/c} \sum_{m=0}^{\upsilon} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{2t_1}{c}\right)^m \right], \end{aligned}$$

cela par l'équation (7). Cette formule s'obtient aussi directement par intégration par parties. Dans le cas particulier où $k \in \mathbb{N}$, les sommes infinies précédentes s'arrêtent à $2k$. ∎

À présent, pour estimer les trois paramètres du modèle, soit λ, μ et c, il est nécessaire d'obtenir des expressions pour les valeurs $E[X(t)]$, $Var[X(t)]$ et $Cov[X(t_1), X(t_2)]$ lorsque le processus est en régime asymptotique. En clair, cela équivaut à dire que le processus a été en opération pour un temps suffisamment long. Ainsi, puisque

$$\lim_{x \to +\infty} \gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha),$$

$$\lim_{t \to +\infty} E[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu} c^{k+1} \Gamma(k+1) \quad \text{si} \quad k > -1 \tag{8}$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} Var[X(t)] = \frac{2\lambda}{\mu^2} \left(\frac{c}{2}\right)^{2k+1} \Gamma(2k+1) \quad \text{si} \quad k > -\frac{1}{2}. \tag{9}$$

La covariance entre $X(t)$ et $X(t+\delta)$ est donnée par

$$\begin{aligned} Cov[X(t), X(t+\delta)] &= \lambda \int_0^t E\left[Y^2 \left[(t-\tau)(t+\delta-\tau)\right]^k e^{-(2t+\delta-2\tau)/c}\right] \\ &= \frac{2\lambda}{\mu^2} e^{-\delta/c} \int_0^t \left[s(s+\delta)\right]^k e^{-2s/c} ds. \end{aligned}$$

Or, avec $k > -1$,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \left[s(s+\delta)\right]^k e^{-2s/c} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\delta c}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}} e^{\frac{\delta}{c}} \Gamma(k+1) K_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta}{c}\right),$$

où $K_{k+\frac{1}{2}}(\cdot)$ est une fonction de Bessel modifiée (se référer à Abramowitz et Stegun, 1965, p. 374). Ainsi, en régime asymptotique,

$$\lim_{t \to +\infty} Cov[X(t), X(t+\delta)] = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}\mu^2} \left(\frac{\delta c}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}} \Gamma(k+1) K_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta}{c}\right),$$

tandis que le coefficient de corrélation $\rho_{X(t),X(t+\delta)}$, en régime asymptotique, est donné, lorsque $k > -\frac{1}{2}$, par

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\rho_{X(t),X(t+\delta)} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{Cov\left[X(t),X(t+\delta)\right]}{\sqrt{Var\left[X(t)\right]}\sqrt{Var\left[X(t+\delta)\right]}} \\
&= \frac{\frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}\mu^2}\left(\frac{\delta c}{2}\right)^{k+\frac{1}{2}}\Gamma(k+1)\,K_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta}{c}\right)}{\frac{2\lambda}{\mu^2}\left(\frac{c}{2}\right)^{2k+1}\Gamma(2k+1)} \\
&= \left(\frac{2\delta}{c}\right)^{k+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2k+1)}K_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\delta}{c}\right). \qquad (10)
\end{aligned}$$

À présent, soit $E\left[X(t+1)|A(t)\right]$ l'espérance conditionnelle de $X(t+1)$ étant donné l'histoire du processus dans l'intervalle $[0,t]$. Cette valeur servira par la suite d'estimateur pour $X(t+1)$. D'abord, lorsque le paramètre $k=0$, en conditionnant sur le débit $X(t)$ à l'instant t, il en résulte que

$$\begin{aligned}
E\left[X(t+1)|X(t)\right] &= E\left[\sum_{n:0\le\tau_n\le t+1}Y_n e^{-(t+1-\tau_n)/c}\,\middle|\,X(t)\right] \\
&= E\left[\sum_{n:0\le\tau_n\le t}Y_n e^{-(t+1-\tau_n)/c}+\sum_{n:t<\tau_n\le t+1}Y_n e^{-(t+1-\tau_n)/c}\,\middle|\,X(t)\right] \\
&= e^{-1/c}E\left[\sum_{n:0\le\tau_n\le t}Y_n e^{-(t-\tau_n)/c}\,\middle|\,X(t)\right] \\
&\qquad + E\left[\sum_{n:t<\tau_n\le t+1}Y_n e^{-(t+1-\tau_n)/c}\,\middle|\,X(t)\right] \\
&= e^{-1/c}E\left[X(t)|\,X(t)\right]+E\left[X(1)\right] = e^{-1/c}X(t)+E\left[X(1)\right] \\
&= e^{-1/c}X(t)+\frac{\lambda c}{\mu}(1-e^{-1/c}), \qquad (11)
\end{aligned}$$

cela en utilisant le fait que le processus de Poisson possède des accroissements stationnaires et indépendants. Cependant, il est impossible d'obtenir une formule générale pour l'ensemble des $k \in [0, +\infty)$ ni même pour des $k \in \mathbb{N}$. En effet,

$$\begin{aligned} E\left[X(t+1)|X(t)\right] &= e^{-1/c} E\left[\sum_{n:0 \le \tau_n \le t} Y_n \left(t+1-\tau_n\right)^k e^{-(t-\tau_n)/c} \middle| X(t) \right] \\ &\quad + E\left[\sum_{n:t < \tau_n \le t+1} Y_n \left(t+1-\tau_n\right)^k e^{-(t+1-\tau_n)/c} \middle| X(t) \right] \\ &= e^{-1/c} E\left[\sum_{n:0 \le \tau_n \le t} Y_n \left(t+1-\tau_n\right)^k e^{-(t-\tau_n)/c} \middle| X(t) \right] + E\left[X(1)\right], \end{aligned}$$

la dernière espérance conditionnelle ne pouvant être évaluée explicitement. De façon à contourner cet inconvénient et obtenir une expression pour $E\left[X(t+1)|\, X(t)\right]$, au moins lorsque k est un entier, soit

$$X_j\left(t\right) = \sum_{n:0 \le \tau_n \le t} Y_n (t-\tau_n)^j e^{-(t-\tau_n)/c}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, k\},$$

où nécessairement $X_k\left(t\right) \equiv X(t)$. Par le théorème du binôme,

$$\begin{aligned} \sum_{n:0 \le \tau_n \le t} Y_n (t+1-\tau_n)^k e^{-(t-\tau_n)/c} &= \sum_{n:0 \le \tau_n \le t} Y_n \left\{ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (t-\tau_n)^j \right\} e^{-(t-\tau_n)/c} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X_j(t). \end{aligned}$$

Or, la seule connaissance de $X(t)$ ne permet aucunement d'évaluer $X_j\left(t\right)$ pour $j < k$. Cependant, si l'ensemble $A(t)$ des τ_n de l'intervalle $[0, t]$ et des Y_n correspondants est connu (ou peuvent être estimés avec suffisamment de précision), alors

$$E\left[X_j\left(t\right)|\, A(t)\right] = X_j(t) \text{ pour } j = 0, 1, ..., k.$$

Il suit de là que

$$\begin{aligned}
E\left[X(t+1)\right|A(t)] &= e^{-1/c}E\left[\sum_{n:0\leq\tau_n\leq t} Y_n\,(t+1-\tau_n)^k\,e^{-(t-\tau_n)/c}\right| A(t)\Bigg] + E\left[X(1)\right] \\
&= e^{-1/c}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X_j(t) + E\left[X(1)\right] \\
&= e^{-1/c}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X_j(t) + \frac{\lambda c^{k+1}}{\mu}k!\left\{1 - e^{-1/c}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!\,c^j}\right\}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

De toute évidence, une expression plus générale pour l'espérance conditionnelle pourrait être obtenue en considérant une valeur $\delta > 0$ et en calculant $E\left[X(t+\delta)\right|A(t)]$. En outre, pour obtenir une expression approximative pour des valeurs de k qui ne sont pas nécessairement des entiers, il est possible de conditionner sur le nombre d'événements s'étant produits dans l'intervalle $(t, t+\delta]$. Soit donc $k > -1$. Alors

$$E\left[X(t+\delta)\right|A(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} E\left[X_k(t+\delta)\right|A(t), N(t+\delta)-N(t)=n]\,P\left[N(t+\delta)-N(t)=n\right].$$

En supposant que la probabilité qu'il y ait plus d'un événement dans l'intervalle $(t, t+1]$ soit négligeable, et en utilisant le fait que lorsque $N(t+1) - N(t) = 1$ l'instant d'arrivée de l'événement dans l'intervalle $(t, t+1]$ est distribué uniformément sur cet intervalle,

$$\begin{aligned}
E\left[X(t+1)\right|A(t)] &\simeq e^{-1/c}E\left[\sum_{n:0\leq\tau_n\leq t} Y_n\,(t+1-\tau_n)^k\,e^{-(t-\tau_n)/c}\right| A(t)\Bigg] \\
&\quad + \frac{1}{\mu}\int_t^{t+1}(t+1-s)^k\,e^{-(t+1-s)/c}\cdot 1ds\cdot\left(\lambda e^{-\lambda}\right) \\
&= e^{-1/c}E\left[\sum_{n:0\leq\tau_n\leq t} Y_n\,(t+1-\tau_n)^k\,e^{-(t-\tau_n)/c}\right| A(t)\Bigg] \\
&\quad + \frac{\lambda}{\mu}e^{-\lambda}c^{k+1}\gamma\left(k+1, \frac{1}{c}\right). \qquad (13)
\end{aligned}$$

Le premier terme du membre droit est l'espérance, à l'instant $t+1$, de l'effet résiduel des signaux de l'intervalle $[0, t]$, tandis que le second terme est la contribution du seul événement potentiel se produisant dans l'intervalle $(t, t+1]$, multipliée par la probabilité que cet événement se réalise.

Il apparaît d'ores et déjà que les méthodes ici employées comportent un inconvénient majeur : l'expression obtenue ne dépend pas directement de la valeur de l'observation la plus récente du débit $X(t)$. En réalité, pour utiliser les formules (12) et (13), il est nécessaire de connaître l'ensembles des valeurs τ_n et Y_n ou de pouvoir les estimer avec précision. Cependant, ce qui est généralement connu, ce sont les valeurs des débits. Comme il sera montré plus loin, estimer les τ_n lorsque les Y_n correspondants ont une amplitude assez grande est une tâche relativement simple. Toutefois, déterminer les Y_n avec précision est plus ardu.

1.2 Modélisation et prévision du débit du fleuve Delaware

Les équations obtenues dans la section précédente sont ici utilisées pour modéliser le débit du fleuve Delaware ainsi que pour prédire le débit de ce fleuve le lendemain de l'observation la plus récente. Les données sont disponibles sur Internet à l'adresse http ://nwis.waterdata. usgs.gov. Plus précisément, les relevés de la station Montague (no 014385), au New Jersey, serviront à cette fin.

Pour la période s'étalant du 1^{er} octobre 2002 au 30 septembre 2003, le débit moyen $\overline{x}$ fut de 7518 pi^3/s avec un écart-type s de 6358. Le coefficient de corrélation r des 364 paires de débits pour deux jours consécutifs fut quant à lui de $0,901$.

1.2.1 Modèle lorsque $k = 0$

En prenant $k = 0$ dans l'équation (10),

$$\lim_{t \to +\infty} \rho_{X(t),X(t+\delta)} = e^{-\delta/c} \tag{14}$$

et il suit de là que

$$e^{-1/c} \simeq 0,901,$$

ce qui entraîne qu'un estimateur pour c est donné par

$$\widehat{c} \simeq 9,59.$$

Ainsi, des équations (8) et (9),

$$\frac{\lambda}{\mu}(9,59) \simeq 7518 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\mu^2}(9,59) \simeq (6358)^2$$

de sorte que

$$\widehat{\mu} = \frac{7518}{(6358)^2} \simeq 1,86 \times 10^{-4} \quad \text{et} \quad \widehat{\lambda} \simeq 0,1458.$$

Le modèle de base pour le débit du fleuve Delaware est donc

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n e^{-(t-\tau_n)/9,59} \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \quad (X(t) = 0 \text{ si } N(t) = 0), \tag{15}$$

$\{N(t), t \geq 0\}$ étant un processus de Poisson de taux $0,1458$, tandis que les variables aléatoires Y_n sont distribuées selon une loi exponentielle de paramètre $1,86 \times 10^{-4}$.

Une méthode appropriée pour valider un modèle consiste à comparer les coefficients de corrélation théoriques asymptotiques, $\rho(\delta)$, et échantillonnaux, $r(\delta)$, des débits $X(t)$ et $X(t+\delta)$ pour $\delta = 1, \ldots, 7$. Selon l'équation (10), le coefficient de corrélation théorique est approximativement donné par $e^{-\delta/9,59}$. Le tableau 1.1 est un tableau comparatif de ces valeurs.

Tableau 1.1 : Coefficients de corrélation théoriques asymptotiques et échantillonnaux des débits $X(t)$ et $X(t+\delta)$ pour $\delta = 1, \ldots, 7$ lorsque $k = 0$ et $\widehat{c} = 9,59$.

δ	1	2	3	4	5	6	7
$\rho(\delta)$	$0,901$	$0,812$	$0,731$	$0,659$	$0,594$	$0,535$	$0,482$
$r(\delta)$	$0,901$	$0,747$	$0,612$	$0,510$	$0,425$	$0,346$	$0,289$
$\rho(\delta) - r(\delta)$	0	$0,065$	$0,119$	$0,149$	$0,169$	$0,189$	$0,193$

Des données du tableau 1.1, il apparaît que la différence entre $\rho(\delta)$ et $r(\delta)$ augmente de $\delta = 1$ à $\delta = 7$, l'erreur d'estimation commise étant de $66,8\%$ lorsque $\delta = 7$. Le modèle considéré dans cette section est donc un modèle valable lorsqu'il s'agit de prévoir le débit du fleuve le lendemain de l'observation la plus récente. Il s'avère beaucoup moins efficace lorsqu'il s'agit de prévoir des débits à plus long terme, par exemple trois jours après l'observation la plus récente. Pourtant, l'objectif ne vise pas simplement à prédire des débits sur une brève période (des modèles efficaces et éprouvés existant déjà) mais à prédire des débits sur une plus longue période.

Une autre façon de valider un modèle est de l'utiliser directement pour prévoir un débit. En considérant les débits observés sur une période de 101 jours, à savoir la période couvrant les 101 derniers jours des quatre premiers mois de l'année 2004, et en construisant le modèle suivant avec $k = 0$ (se référer à l'équation (11)),

$$E\left[X(t+1)|X(t)\right] = e^{-1/c}X(t) + \frac{\lambda c}{\mu}(1 - e^{-t/c}) \simeq 0,901X(t) + 744,3, \tag{16}$$

il ressort que la moyenne et l'écart-type de la valeur absolue des erreurs de prévision

$$e = X(t+1) - E\left[X(t+1)|X(t)\right]$$

sont $\widehat{x}_0 = 838$ et $s_0 = 1022$. Ces valeurs serviront à comparer les différents modèles entre eux.

Une méthode qui s'est avérée efficace pour des prévisions à court terme est celle de la régression linéaire (se référer à Lefebvre, 2003). À partir des données utilisées jusqu'ici pour estimer ponctuellement les paramètres λ, μ et c, l'équation de régression du débit $X(t+1)$, connaissant $X(t)$, est

$$\widehat{X(t+1)} \simeq 0,902X(t) + 771,$$

équation qui est très similaire à l'équation (16). Avec cet estimateur de $X(t+1)$, la moyenne et l'écart-type des erreurs de prévision, en valeur absolue, sont

$$\widehat{x}_1 = 858 \quad \text{et} \quad \widehat{s}_1 = 1010.$$

Lorsque les régresseurs sont $X(t)$ et $X(t-1)$, l'équation de régression multiple devient

$$\widehat{X(t+1)} \simeq 1025 + 1,21X(t) - 0,346X(t-1)$$

et de là,

$$\widehat{x}_2 = 801 \quad \text{et} \quad \widehat{s}_2 = 957.$$

Par suite, le processus de Poisson filtré avec $k = 0$ est un modèle efficace pour prévoir le débit du fleuve Delaware puisqu'il conduit à des résultats comparables à ceux obtenus de la régression linéaire.

1.2.2 Modèle lorsque $k = 1$

Le modèle de base avec $k = 0$ est simple mais n'est pas conforme à la réalité. Pour estimer les différents paramètres du modèle avec $k = 1$, c'est-à-dire

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n(t - \tau_n) e^{-(t-\tau_n)/c} \quad (X(t) = 0 \;\text{ si }\; N(t) = 0),$$

il suffit d'utiliser l'expression du coefficient de corrélation théorique asymptotique de $X(t)$ et $X(t+\delta)$

$$\rho_1(\delta) := \lim_{t\to+\infty} \rho_{X(t),X(t+\delta)} = e^{-\delta/c}(1+\frac{\delta}{c}),$$

laquelle expression est obtenue à partir de l'équation (10). À noter que le paramètre c est différent de celui du modèle où $k=0$. Ainsi,

$$0,901 \simeq e^{-1/c}(1+\frac{1}{c})$$

entraîne que $\widehat{c} \simeq 1,89$. Les valeurs de $\rho_1(\delta)$, pour $\delta = 1,\ldots,7$, sont présentées dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2 : Coefficients de corrélation théoriques asymptotiques des débits $X\,(t)$ et $X\,(t+\delta)$ pour $\delta = 1,\ldots,7$ lorsque $k=1$ et $\widehat{c} = 1,89$.

δ	1	2	3	4	5	6	7
$\rho_1\,(\delta)$	0,901	0,714	0,529	0,375	0,259	0,175	0,116
$\rho_1\,(\delta) - r\,(\delta)$	0	−0,033	−0,083	−0,135	−0,166	−0,171	−0,173

En comparant ces résultats avec ceux du tableau 1.1, il appert que la valeur absolue de l'erreur d'estimation du coefficient de corrélation de $X(t)$ et $X(t+\delta)$ commise est toujours un peu inférieure à celle du modèle avec $k=0$. En outre, $\rho_1\,(\delta)$ est toujours inférieur au coefficient de corrélation correspondant, à l'inverse du coefficient de corrélation $\rho\,(\delta)$ qui lui est toujours supérieur. Il semble donc qu'une valeur du paramètre k située dans l'intervalle $(0,1)$ devrait traduire plus fidèlement la réalité.

Une façon alternative d'évaluer le paramètre c lorsque $k>0$ est la suivante : selon le modèle, un maximum devrait être observé kc unités de temps après la réception d'un signal. En effet, en posant

$$g(t) = (t-\tau)^k\, e^{-(t-\tau)/c},$$

il vient que la valeur $t-\tau = kc$ maximise la fonction $g\,(t)$. Si le temps qui s'écoule entre deux signaux est suffisamment long, un maximum devrait être atteint kc unités de temps (des jours dans le présent cas) après l'instant τ. Considérant les 50 minima et maxima successifs observés au cours de la période s'étalant du 1^{er} octobre 2002 au 30 septembre 2003, le temps moyen entre un minimum donné et le maximum suivant est d'environ 2,28 jours. En comparant encore une fois les coefficients de corrélation théoriques asymptotiques et échantillonnaux, cette fois avec $\widehat{c} \simeq 2,28$ (se référer au tableau 1.3), il ressort que le coefficient de corrélation théorique $\rho_1^*(\delta)$ est supérieur à $r(\delta)$ lorsque $\delta = 1, 2$ et 3 et est inférieur à $r(\delta)$ lorsque $\delta = 4, 5, 6$ et 7. Aussi, la différence, en valeur absolue, entre $\rho_1^*(\delta)$ et $r(\delta)$ est inférieure à celle entre $\rho_1(\delta)$ et $r(\delta)$, à l'exception de $\delta = 1$ et 2. Lorsque $k = 1$, l'estimateur $\widehat{c} = 2,28$ conduit à de meilleurs résultats que l'estimateur $\widehat{c} = 1,89$ (même si $\rho_1^*(\delta)$ n'est pas égal à $0,901$) et sera utilisé pour la suite. Les résultats sont aussi meilleurs que ceux obtenus du modèle avec $k = 0$.

Tableau 1.3 : Coefficients de corrélation théoriques asymptotiques des débits $X(t)$ et $X(t+\delta)$ pour $\delta = 1, \ldots, 7$ lorsque $k = 1$ et $\widehat{c} = 2,28$.

δ	1	2	3	4	5	6	7
$\rho_1^*(\delta)$	$0,928$	$0,781$	$0,621$	$0,477$	$0,356$	$0,261$	$0,189$
$\rho_1^*(\delta) - r(\delta)$	$0,027$	$0,034$	$0,009$	$-0,033$	$-0,069$	$-0,085$	$-0,100$

À présent, pour prédire le débit $X(t+1)$, basé sur l'histoire du processus $A(t)$ dans l'intervalle $[0, t]$, il faut considérer l'équation (12) qui devient, lorsque $k = 1$,

$$E\left[X(t+1)\,|A(t)\right] = e^{-1/c}\left\{X_0(t) + X_1(t) - \frac{\lambda c}{\mu}\right\} + \frac{\lambda c^2}{\mu}\left(1 - e^{-1/c}\right),$$

dans laquelle $X_1(t)$ est le débit observé à l'instant t, tandis que $X_0(t)$ est la valeur de $X(t)$ qui aurait été observée avec $k = 0$ et le paramètre c qui correspond à $k = 1$. Par l'équation (8), lorsque que le processus a été en opération durant une période suffisamment longue,

$$E\left[X(t)\right] = \frac{\lambda c^2}{\mu}.$$

Ainsi,

$$E\left[X\left(t+1\right)\left|A(t)\right.\right]=e^{-1/2,28}\left\{X_0(t)+X_1(t)-\frac{7518}{2,28}\right\}+7518\left(1-e^{-1/2,28}\right). \qquad (17)$$

Pour utiliser cette formule, il est nécessaire de reconstruire la suite des débits avec $k=0$ et $c=2,28$. Pour estimer les valeurs des Y_n, il suffit de calculer la différence entre un maximum donné et le minimum correspondant. Cependant, cette façon de faire pourrait mener à une sous-estimation du nombre de signaux alors que plus d'un événement pourrait se produire sur une brève période de temps. Cela aurait pour conséquence qu'il n'y aurait pas de décroissance observable du débit entre deux signaux. En supposant que les variables aléatoires Y_n soient connues avec une précision assez grande, une suite de valeurs pour $X_0(t)$ est calculée. De l'équation (17) découle que la valeur absolue de la moyenne des erreurs de prévision, lorsque $k=1$, est de 1183 avec un écart-type de 1573. Le modèle avec $k=0$ est donc plus performant pour prévoir des débits.

1.2.3 Combinaison des modèles avec $k=0$ et $k=1$

Une méthode qui permet très souvent de diminuer les erreurs de prévisions consiste à prendre la moyenne arithmétique des prévisions fournies par l'un et l'autre des modèles. En procédant de la sorte avec les modèles où $k=0$ et $k=1$, la valeur absolue des erreurs de prévisions se trouve réduite à 658 pour un écart-type $s=1172$, ce qui améliore considérablement les prévisions du modèle avec $k=0$. Ainsi, bien que le modèle avec $k=1$ ne puisse être employé seul, celui-ci trouve son utilité en permettant d'améliorer les prévisions.

1.2.4 Modèle lorsque $k=1/2$

Ainsi, tel que mentionné plus haut, une valeur de k prise dans l'intervalle $(0,1)$ devrait conduire à un modèle mieux adapté à la réalité. En prenant $k=1/2$, le modèle considéré est le suivant :

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n(t-\tau_n)^{1/2} e^{-(t-\tau_n)/c} \quad (X_{1/2}(t) = 0 \text{ si } N(t) = 0).$$

De l'équation (10),

$$\frac{1}{c} K_1(\frac{1}{c}) \simeq 0,901,$$

de laquelle équation il vient que $\widehat{c} = 2,97$. Les coefficients de corrélation théoriques asymptotiques de $X(t)$ et $X(t+\delta)$ pour $\delta = 1, 2, \ldots, 7$ sont présentés au tableau 1.4, d'où il ressort que la distance entre $\rho_{1/2}(\delta)$ et $r\,(\delta)$ est généralement plus faible que lorsque $k = 0$ ou $k = 1$. Particulièrement, $\rho_{1/2}(2)$ et $r\,(2)$ sont à toute fin pratique égaux. Le modèle considéré dans cette section est donc le meilleur en ce qui concerne le fleuve Delaware, cela par le critère des coefficients de corrélation.

Tableau 1.4 : Coefficients de corrélation théoriques asymptotiques des débits $X(t)$ et $X\,(t+\delta)$ pour $\delta = 1, \ldots, 7$ lorsque $k = 1/2$ et $\widehat{c} = 2,97$.

δ	1	2	3	4	5	6	7
$\rho_{1/2}(\delta)$	$0,901$	$0,748$	$0,598$	$0,468$	$0,361$	$0,275$	$0,208$
$\rho_{1/2}(\delta) - r\,(\delta)$	0	$0,001$	$-0,014$	$-0,040$	$-0,064$	$-0,071$	$-0,081$

L'équation suivante permet de prévoir le débit lorsque $k = 1/2$ (se référer à l'équation (13)) :

$$\begin{aligned} E\left[X\,(t+1)\,|A(t)\right] \;\; &\simeq \;\; e^{-1/c} E\left[\sum_{n:0\leq\tau_n\leq t} Y_n\,(t+1-\tau_n)^{1/2}\, e^{-(t-\tau_n)/c} | A(t)\right] \\ &\qquad + \frac{\lambda}{\mu} e^{-\lambda} c^{3/2} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{c}\right) \end{aligned}$$

et en utilisant les formules (8) et (9) avec $k = 1/2$, il vient que $\widehat{\lambda} \simeq 0,2997$ et $\widehat{\mu} \simeq 1,81 \times 10^{-4}$ sont des estimations ponctuelles pour λ et μ respectivement. À partir de ces valeurs, le second terme de l'équation précédente est approximativement de 671.

Remarque 7 *En construisant l'équation (13), il fallut poser l'hypothèse selon laquelle un nombre d'événements supérieur à un dans l'intervalle* $(t, t+1]$ *était négligeable. Or, avec l'estimateur* $\widehat{\lambda}$ *de* λ*,*

$$e^{-\widehat{\lambda}} + \widehat{\lambda} e^{-\widehat{\lambda}} \simeq 0,9621.$$

L'hypothèse est donc justifié lorsque $k = 1/2$*.*

Encore une fois, au même titre que le cas où $k = 1$, calculer l'ensemble des valeurs τ_n et Y_n n'est pas une tâche simple. Pourtant, cela est essentiel pour bien évaluer le premier terme du membre droit de l'estimateur.

Dans le prochain chapitre, un processus dérivé du processus de Poisson filtré est introduit. Son utilité dans la modélisation du débit d'un fleuve ou d'une rivière est montrée par une application au débit du fleuve Delaware. Son efficacité est ainsi mesurée.

CHAPITRE 2

UN PROCESSUS DÉRIVÉ DU PROCESSUS DE POISSON FILTRÉ

Pour la fonction de réponse jusqu'à maintenant considérée, si le temps s'écoulant entre deux événements successifs est suffisamment important, et la constante c petite, l'influence des événements précédant l'événement le plus récent sur l'état du système devient négligeable. Est maintenant défini, de façon générale, le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ par

$$X(t) = X(0) + w\left(t, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right), \ t \geq 0 \tag{18}$$

où $w(t, \tau, y)$ est une fonction de réponse. Or, bien qu'une fonction de réponse soit normalement non négative, ici il est seulement imposé que

$$w\left(t, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right) = 0 \ \text{ si } \ N(t) = 0.$$

En outre, puisque $N(0) = 0$,

$$w\left(0, \tau_{N(0)}, Y_{N(0)}\right) = w(t, \tau_0, Y_0) = 0.$$

Aussi, $X(0)$ peut être considérée comme une variable aléatoire, indépendante du processus $\{N(t), t \geq 0\}$ et sera réputée telle pour la suite.

2.1 Résultats théoriques

Dans cette section, les différents moments du processus sont calculés. Les résultats sont aussi donnés pour le cas particulier où la fonction de réponse est celle de l'équation (1).

Proposition 8 *Pour le processus stochastique défini en (18), si* $E[|X(0)|] < +\infty$ *et* $E[|w(t,s,Y)|] < +\infty$ *pour tout* τ,

$$E[X(t)] = E[X(0)] + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t E[w(t,s,Y)]\, e^{\lambda s} ds$$

où Y *est une variable aléatoire distribuée comme les* Y_n.

Preuve. Il suffit de conditionner sur l'ensemble des valeurs possibles de $N(t)$ et d'écrire que

$$E[X(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} E[X(t)|\, N(t) = n]\, P[N(t) = n],$$

où

$$P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots$$

Dans le cas où $N(t) > 0$, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E[X(t)|\, N(t) = n] &= E[X(0)] + E\left[w\left(t, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right) \middle|\, N(t) = n\right] \\ &= E[X(0)] + E[w(t, \tau_n, Y_n)|\, N(t) = n], \end{aligned}$$

tandis que

$$E[X(t)|\, N(t) = 0] = E[X(0)].$$

À présent, étant donné que $N(t) = n$, l'instant d'arrivée τ_n du dernier événement dans l'intervalle $[0,t]$ est distribué comme le maximum de n variables aléatoire uniformes $U[0,t]$ et indépendantes (se référer à Lefebvre, 2005, p. 277 ou à Ross, 2003, p. 303), c'est-à-dire que

$$f_{\tau_n}(s|\, N(t) = n > 0) = \frac{n}{t^n} s^{n-1} \quad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq t.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E[w(t, \tau_n, Y_n)|\, N(t) = n] &= \int_0^t E[w(t,s,Y)]\, \frac{n}{t^n} s^{n-1} ds \\ &= \frac{n}{t^n} \int_0^t E[w(t,s,Y)]\, s^{n-1} ds \end{aligned}$$

où Y est une variable aléatoire distribuée comme les Y_n. Ainsi,

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[X(0)]e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{E[X(0)] + \frac{n}{t^n}\int_0^t E[w(t,s,Y)]\,s^{n-1}ds\right\} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= E[X(0)] + \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{n}{t^n}\int_0^t E[w(t,s,Y)]\,s^{n-1}ds\right\} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= E[X(0)] + e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t E[w(t,s,Y)]\,s^{n-1}ds. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de la convergence dominée,

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[X(0)] + e^{-\lambda t}\int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}E[w(t,s,Y)]\,s^{n-1}ds \\ &= E[X(0)] + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t E[w(t,s,Y)]\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda s)^m}{m!}ds \\ &= E[X(0)] + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t E[w(t,s,Y)]\,e^{\lambda s}ds. \end{aligned}$$

■

Corollaire 9 *Pour la fonction de réponse*

$$w(t,\tau,y) = y\,(t-\tau)^k\,e^{-(t-\tau)/c}, \quad t \geq 0,$$

la moyenne du processus stochastique à l'instant t, lorsque $k > -1$, est donnée par

$$E[X(t)] = E[X(0)] + \lambda E[Y]\left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)^{k+1}\gamma\left(k+1, \left(\lambda + \frac{1}{c}\right)t\right).$$

Particulièrement, lorsque $k = 0, 1, \ldots,$

$$E[X(t)] = E[X(0)] + \lambda k!E[Y]\left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)^{k+1}\left[1 - e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)t}\sum_{m=0}^{k}\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)^m\frac{t^m}{m!}\right].$$

Preuve. Par la proposition 8,

$$\begin{aligned} E\left[X(t)\right] &= E\left[X(0)\right] + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t E\left[Y\left(t-s\right)^k e^{-(t-s)/c}\right] e^{\lambda s} ds \\ &= E\left[X(0)\right] + \lambda e^{-\lambda t} E\left[Y\right]\int_0^t \left(t-s\right)^k e^{-(t-s)/c} e^{\lambda s} ds, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$E\left[X(t)\right] = E\left[X(0)\right] + \lambda e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)t} E\left[Y\right]\int_0^t \left(t-s\right)^k e^{\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)s} ds.$$

Or, si $k > -1$, alors l'intégrale

$$I_1 := \int_0^t \left(t-s\right)^k e^{\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)s} ds$$

est la fonction (Gradshteyn et Ryzhik, 2000, p. 343)

$$I_1 = \left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)^{k+1} e^{\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)t}\gamma\left(k+1, \left(\lambda+\frac{1}{c}\right)t\right).$$

Particulièrement, lorsque $k = 0, 1, \ldots$, (Gradshteyn et Ryzhik, 2000, p. 890)

$$I_1 = k!\left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)^{k+1} e^{\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)t}\left[1 - e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)t}\sum_{m=0}^{k}\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)^m \frac{t^m}{m!}\right].$$

■

Proposition 10 *Pour le processus stochastique défini en (18), si* $E\left[X^2(0)\right] < +\infty$ *et* $E\left[w^2\left(t,s,Y\right)\right] < +\infty$ *pour tout* τ*,*

$$\begin{aligned} Var\left[X(t)\right] &= Var\left[X(0)\right] + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t E\left[w^2\left(t,s,Y\right)\right] e^{\lambda s} ds \\ &\qquad - \lambda^2 e^{-2\lambda t}\left\{\int_0^t E\left[w\left(t,s,Y\right)\right] e^{\lambda s} ds\right\}^2 \end{aligned}$$

où Y *est une variable aléatoire distribuée comme les* Y_n*.*

Preuve. Par indépendance entre $X(0)$ et les processus $\{Y_n, n \geq 0\}$ et $\{\tau_n, n \geq 0\}$,

$$Var\left[X(t)\right] = Var\left[X(0)\right] + Var\left[w\left(t, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right)\right].$$

En conditionnant sur l'ensemble des valeurs possibles de $N(t)$,

$$\begin{aligned} E\left[w^2\left(t, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right)\right] &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[w^2\left(t, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right) \middle| N(t) = n\right] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[w^2\left(t, \tau_n, Y_n\right) \middle| N(t) = n\right] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} E\left[w^2\left(t, \tau_n, Y_n\right) \middle| N(t) = n > 0\right] &= \int_0^t E\left[w^2\left(t, s, Y\right)\right] \frac{n}{t^n} s^{n-1} ds \\ &= \frac{n}{t^n} \int_0^t E\left[w^2\left(t, s, Y\right)\right] s^{n-1} ds. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E\left[w^2\left(t, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right)\right] &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{n}{t^n} \int_0^t E\left[w^2\left(t, s, Y\right)\right] s^{n-1} ds \right\} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \int_0^t E\left[w^2\left(t, s, Y\right)\right] s^{n-1} ds \right\} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Le résultat découle du théorème de la convergence monotone, en vertu duquel

$$\begin{aligned} E\left[w^2\left(t, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right)\right] &= \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t E\left[w^2\left(t, s, Y\right)\right] \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} ds \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t E\left[w^2\left(t, s, Y\right)\right] e^{\lambda s} ds, \end{aligned}$$

ainsi que de la proposition 8 qui fournit le terme $E^2\left[w\left(t, s, Y\right)\right]$. ∎

Corollaire 11 *Lorsque la fonction de réponse est*

$$w\left(t,\tau,y\right)=y\left(t-\tau\right)^{k}e^{-(t-\tau)/c},\quad t\geq 0,$$

et $k>-\frac{1}{2}$*, la variance du processus stochastique à l'instant* t *est donnée par*

$$\begin{aligned} Var\left[X(t)\right] &= Var\left[X(0)\right]+\lambda E\left[Y^{2}\right]\left(\frac{c}{c\lambda+2}\right)^{2k+1}\gamma\left(2k+1,\left(\lambda+\frac{2}{c}\right)t\right) \\ &\quad -\left\{\lambda E\left[Y\right]\left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)^{k+1}\gamma\left(k+1,\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)t\right)\right\}^{2}. \end{aligned}$$

Particulièrement, si $k=0,\frac{1}{2},1,\ldots,$

$$\gamma\left(2k+1,\left(\lambda+\frac{2}{c}\right)t\right)=(2k)!\left[1-e^{-\left(\lambda+\frac{2}{c}\right)t}\sum_{m=0}^{2k}\left(\lambda+\frac{2}{c}\right)^{m}\frac{t^{m}}{m!}\right]$$

et si $k=0,1,\ldots,$

$$\gamma\left(k+1,\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)t\right)=k!\left[1-e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)t}\sum_{m=0}^{k}\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)^{m}\frac{t^{m}}{m!}\right].$$

Preuve. Il ne reste qu'à calculer l'intégrale

$$I_{2}:=\lambda e^{-\lambda t}\int_{0}^{t}E\left[Y\left(t-s\right)^{k}e^{-(t-s)/c}\right]^{2}e^{\lambda s}ds.$$

Or,

$$I_{2}=\lambda e^{-\lambda t}E\left[Y^{2}\right]\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{2k}e^{-2(t-s)/c}e^{\lambda s}ds$$

et lorsque $k>-\frac{1}{2}$ (Gradshteyn et Ryzhik, 2000, p. 343),

$$\begin{aligned} I_{2} &= \lambda e^{-\lambda t}E\left[Y^{2}\right]e^{-\frac{2t}{c}}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{2k}e^{\left(\lambda+\frac{2}{c}\right)s}ds \\ &= \lambda E\left[Y^{2}\right]\left(\frac{c}{c\lambda+2}\right)^{2k+1}\gamma\left(2k+1,\left(\lambda+\frac{2}{c}\right)t\right). \end{aligned}$$

Particulièrement, lorsque $k = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$(Gradshteyn et Ryzhik, 2000, p. 890),

$$I_2 = \lambda (2k)! E\left[Y^2\right] \left(\frac{c}{c\lambda + 2}\right)^{2k+1} \left[1 - e^{-\left(\lambda + \frac{2}{c}\right)t} \sum_{m=0}^{2k} \left(\lambda + \frac{2}{c}\right)^m \frac{t^m}{m!}\right].$$

■

Les résultats des propositions 8 et 10 peuvent être généralisés par la fonction caractéristique de $X(t)$.

Proposition 12 *La fonction caractéristique* $\Phi_{X(t)}(u) := E\left[e^{iuX(t)}\right]$ *de la variable aléatoire* $X(t)$*, pour le processus stochastique défini en (18), est donnée par*

$$\Phi_{X(t)}(u) = e^{-\lambda t} \Phi_{X(0)}(u) \left\{1 + \lambda \int_0^t E\left[e^{iuw(t,s,Y)}\right] e^{\lambda s} ds\right\},$$

où $\Phi_{X(0)}(u)$ *est la fonction caractéristique de* $X(0)$.

Preuve. Par indépendance entre $X(0)$ et les variables $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\Phi_{X(t)}(u) := E\left[e^{iuX(0)}\right] E\left[e^{iuw\left(t,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)}\right].$$

En conditionnant sur $N(t)$,

$$\begin{aligned} E\left[e^{iuw\left(t,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)}\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} E\left[e^{iuw\left(t,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)} \middle| N(t) = n\right] P\left[N(t) = n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} E\left[e^{iuw\left(t,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)} \middle| N(t) = n\right] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Or, si $N(t) = 0$,

$$E\left[e^{iuw\left(t,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)} \middle| N(t) = 0\right] = 1,$$

tandis que si $N(t) = n > 0$,

$$E\left[e^{iuw\left(t,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)}\middle| N(t) = n\right] = \int_0^t E\left[e^{iuw(t,s,Y)}\right] \frac{n}{t^n} s^{n-1} ds$$
$$= \frac{n}{t^n} \int_0^t E\left[e^{iuw(t,s,Y)}\right] s^{n-1} ds.$$

Finalement,

$$E\left[e^{iuw\left(t,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)}\right] = e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{+\infty} E\left[e^{iuw\left(t,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)}\middle| N(t) = n\right] e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{\frac{n}{t^n} \int_0^t E\left[e^{iuw(t,s,Y)}\right] s^{n-1} ds\right\} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

et, par le théorème de la convergence dominée,

$$E\left[e^{iuw\left(t,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)}\right] = e^{-\lambda t}\left\{1 + \lambda \int_0^t E\left[e^{iuw(t,s,Y)}\right] \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} ds\right\}$$
$$= e^{-\lambda t}\left\{1 + \lambda \int_0^t E\left[e^{iuw(t,s,Y)}\right] e^{\lambda s} ds\right\}.$$

■

Remarque 13 *Sous les conditions* $E\left[X^2(0)\right] < +\infty$ *et* $E\left[w^2(t,s,Y)\right] < +\infty$*, la fonction caractéristique* $\Phi_{X(t)}(u)$ *est de classe* C^2 *et*

$$\Phi_{X(t)}^{(k)}(u)\Big|_{u=0} = i^k E\left[X^k(t)\right]$$

pour $k = 1, 2$. *Cette écriture conduit aux mêmes résultats que ceux des propositions 8 et 10.*

À présent, soit $H(t)$ l'histoire du processus dans l'intervalle $[0, t]$. En clair, connaître $H(t)$ revient à connaître $X(u)$ pour tout u dans l'intervalle $[0, t]$ ainsi que les instants d'arrivée τ_n des événements et les valeurs des variables aléatoires Y_n.

Proposition 14 *L'espérance conditionnelle de $X(t+\delta)$ sous la condition $H(t)$ est la suivante :*

$$\begin{aligned} E\left[X(t+\delta)|\, H(t)\right] &= X(0) + w\left(t+\delta, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right) e^{-\lambda\delta} \\ &\qquad + \lambda e^{-\lambda\delta} \int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta, u+t, Y\right)\right] e^{\lambda u} du. \end{aligned}$$

Preuve. Par une démarche similaire à celle des démonstrations des propositions précédentes, il s'agit d'écrire que

$$\begin{aligned} E\left[X(t+\delta)|\, H(t)\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} E\left[X(t+\delta)|\, H(t), N(t+\delta)-N(t)=n\right] \\ &\qquad \times P\left[N(t+\delta)-N(t)=n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} E\left[X(t+\delta)|\, H(t), N(t+\delta)-N(t)=n\right] e^{-\lambda\delta} \frac{(\lambda\delta)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Or,

$$E\left[X(t+\delta)|\, H(t), N(t+\delta)-N(t)=0\right] = X(0) + w\left(t+\delta, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right).$$

Aussi, la connaissance de $H(t)$, à l'exception de la valeur de $X(0)$, est inutile lorsque $N(t+\delta)-N(t)=n>0$. Il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned} & E\left[X(t+\delta)|\, H(t), N(t+\delta)-N(t)=n>0\right] \\ &\quad = E\left[X(t+\delta)|\, X(0), N(t+\delta)-N(t)=n>0\right] \\ &\quad = E\left[X(0) + w\left(t+\delta, \tau_{N(t+\delta)}, Y_{N(t+\delta)}\right)\middle|\, X(0), N(t+\delta)-N(t)=n>0\right] \\ &\quad = X(0) + E\left[w\left(t+\delta, \tau_{N(t+\delta)}, Y_{N(t+\delta)}\right)\middle|\, X(0), N(t+\delta)-N(t)=n>0\right] \\ &\quad = X(0) + \int_t^{t+\delta} E\left[w\left(t+\delta, s, Y\right)\right] \frac{n}{\delta^n} (s-t)^{n-1} ds \\ &\quad = X(0) + \frac{n}{\delta^n} \int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta, u+t, Y\right)\right] u^{n-1} du. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
E\left[X(t+\delta)\right| H(t)] &= \left\{X(0)+w\left(t+\delta,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)\right\} e^{-\lambda\delta} \\
&\quad +\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{X(0)+\frac{n}{\delta^n}\int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta,u+t,Y\right)\right]u^{n-1}du\right\} e^{-\lambda\delta}\frac{(\lambda\delta)^n}{n!} \\
&= X(0)+w\left(t+\delta,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right) e^{-\lambda\delta} \\
&\quad +\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{n}{\delta^n}\int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta,u+t,Y\right)\right]u^{n-1}du\right\} e^{-\lambda\delta}\frac{(\lambda\delta)^n}{n!} \\
&= X(0)+w\left(t+\delta,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right) e^{-\lambda\delta} \\
&\quad +\lambda e^{-\lambda\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta,u+t,Y\right)\right]u^{n-1}du \\
&= X(0)+w\left(t+\delta,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right) e^{-\lambda\delta} \\
&\quad +\lambda e^{-\lambda\delta}\int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta,u+t,Y\right)\right]e^{\lambda u}du
\end{aligned}$$

par convergence dominée. ■

De ce qui précède découle le corollaire suivant.

Corollaire 15 *Lorsque la fonction de réponse est*

$$w\left(t,\tau,y\right)=y\left(t-\tau\right)^k e^{-(t-\tau)/c},\quad t\geq 0,$$

et $k>-1$, l'espérance conditionnelle sous $H(t)$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
E\left[X(t+\delta)\right| H(t)] &= X(0)+\left(X(t)-X(0)\right)e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta}\left(1+\frac{\delta}{t-\tau_{N(t)}}\right)^k \\
&\quad +\lambda E\left[Y\right]\left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)^{k+1}\gamma\left(k+1,\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta\right).
\end{aligned}$$

Particulièrement, lorsque $k=0,1,\ldots,$

$$\gamma\left(k+1,\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta\right)=k!\left[1-e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta}\sum_{m=0}^{k}\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)^m\frac{\delta^m}{m!}\right].$$

Preuve. D'abord,

$$w\left(t+\delta,\tau_{N(t)},Y_{N(t)}\right)=\left(X(t)-X(0)\right)e^{-\delta/c}\left(1+\frac{\delta}{t-\tau_{N(t)}}\right)^{k}.$$

Aussi, pour $k>-1$, (Gradshteyn et Ryzhik, 2000, p. 343)

$$\begin{aligned}\int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta,u+t,Y\right)\right]e^{\lambda u}du &= \int_0^\delta E\left[Y\left(\delta-u\right)^k e^{-(\delta-u)/c}\right]e^{\lambda u}du\\ &= e^{-\frac{\delta}{c}}E\left[Y\right]\int_0^\delta\left(\delta-u\right)^k e^{\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)u}du\\ &= e^{-\frac{\delta}{c}}E\left[Y\right]\left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)^{k+1}e^{\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta}\gamma\left(k+1,\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta\right).\end{aligned}$$

Particulièrement, lorsque $k=0,1,\ldots$, (Gradshteyn et Ryzhik, 2000, p. 343)

$$\gamma\left(k+1,\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta\right)=k!\left[1-e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta}\sum_{m=0}^{k}\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)^m\frac{\delta^m}{m!}\right].$$

■

Remarque 16 *Ainsi, pour la fonction de réponse particulière considérée, il suffit de connaître $X(0)$, $X(t)$ et $\tau_{N(t)}$ pour évaluer explicitement l'espérance conditionnelle ci-dessus et lorsque $k=0$, la valeur de $\tau_{N(t)}$ n'est pas requise. En outre, lorsque $k=0$,*

$$E\left[X(t+\delta)|\,H(t)\right]=\left(X(0)+\lambda E\left[Y\right]\left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)\right)\left(1-e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta}\right)+e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta}X(t).$$

En supposant que $X(0)=0$,

$$E\left[X(t+\delta)|\,H(t)\right]=\lambda E\left[Y\right]\left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)\left(1-e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta}\right)+e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)\delta}X(t). \qquad (19)$$

Lorsque δ est petit, la probabilité qu'il y ait plus d'un événement dans l'intervalle $(t, t+\delta]$ est négligeable. Puisque

$$\begin{aligned} E\left[X(t+\delta)|\, H(t), N(t+\delta)-N(t)=1\right] &= E\left[X(t+\delta)|\, X(0), N(t+\delta)-N(t)=1\right] \\ &= X(0)+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta, u+t, Y\right)\right] du, \end{aligned}$$

l'espérance conditionnelle sous $H(t)$ peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} E\left[X(t+\delta)|\, H(t)\right] &\simeq \left\{X(0)+w\left(t+\delta, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right)\right\} e^{-\lambda\delta} \\ &\quad + \left\{X(0)+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta, u+t, Y\right)\right] du\right\} e^{-\lambda\delta}\lambda\delta \\ &= e^{-\lambda\delta}\left\{X(0)\left(1+\lambda\delta\right)+w\left(t+\delta, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right)\right. \\ &\quad \left. +\lambda\int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta, u+t, Y\right)\right] du\right\}. \end{aligned}$$

Particulièrement, pour la fonction de réponse définie en (1) lorsque $k=0$,

$$\begin{aligned} E\left[X(t+\delta)|\, H(t)\right] &= E\left[X(t+\delta)|\, X(t)\right] \\ &\simeq e^{-\lambda\delta}\left\{X(0)\left(1+\lambda\delta\right)+w\left(t+\delta, \tau_{N(t)}, Y_{N(t)}\right)\right. \\ &\quad \left. +\lambda\int_0^\delta E\left[w\left(t+\delta, u+t, Y\right)\right] du\right\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} &E\left[X(t+\delta)|\, X(t)\right] \\ &\quad \simeq e^{-\lambda\delta}\left\{X(0)\left(1+\lambda\delta\right)+\left(X(t)-X(0)\right)e^{-\delta/c}+\lambda E\left[Y\right]e^{-\delta/c}\int_0^\delta e^{u/c}du\right\} \\ &\quad = e^{-\lambda\delta}\left\{X(0)\left(1+\lambda\delta\right)+\left(X(t)-X(0)\right)e^{-\delta/c}+\lambda c E\left[Y\right]\left(1-e^{-\delta/c}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Encore une fois, en supposant que $X(0)=0$,

$$E\left[X(t+\delta)|\, X(t)\right] \simeq e^{-\lambda\delta}\left\{X(t)e^{-\delta/c}+\lambda c E\left[Y\right]\left(1-e^{-\delta/c}\right)\right\}. \tag{20}$$

Les équations (19) et (20), avec $\delta = 1$, seront utilisées dans la prochaine section pour prévoir le débit du fleuve Delaware le lendemain de l'observation la plus récente de ce débit.

2.2 Prévision du débit du fleuve Delaware

De la formule (19) et avec $\delta = 1$,

$$E\left[X(t+1)|\, H(t)\right] = \lambda E\left[Y\right]\left(\frac{c}{c\lambda+1}\right)\left(1-e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)}\right)+e^{-\left(\lambda+\frac{1}{c}\right)}X(t).$$

Avec les estimations ponctuelles $\widehat{c} = 9,59$, $\widehat{\mu} = 1,86 \times 10^{-4}$ et $\widehat{\lambda} = 0,1458$ (se référer à la section 1.2.1), la moyenne des valeurs absolues des erreurs d'estimation est environ égale à 752. La prévision du débit le lendemain de l'observation la plus récente est meilleure que celle basée sur le modèle de la section 1.2.1, 67 fois sur 101. En prenant la moyenne des prévisions fournies par ces deux modèles comme estimateur du débit du lendemain, la moyenne des valeurs absolues des erreurs de prévision se trouve réduite à 686, ce qui améliore d'autant les résultats.

À présent, basé sur le modèle approximatif (20) avec $\delta = 1$,

$$E\left[X(t+1)|\, X(t)\right] \simeq e^{-\lambda}\left\{X(t)e^{-1/c}+\frac{\lambda c}{\mu}\left(1-e^{-1/c}\right)\right\}.$$

Il apparaît donc que les prévisions obtenues à partir de cette formule sont celles obtenues dans la section 1.2.1 mais multipliées par un facteur $e^{-\lambda} \simeq e^{-0,1458}$, c'est-à-dire un facteur de $0,8643$. De cet estimateur, la moyenne des valeurs absolues des erreurs de prévision est d'environ 771, tandis que la prévision du débit du lendemain est meilleure que celle obtenue en 1.2.1, 66 fois sur 101.

En prenant la moyenne des prévisions fournies par les trois modèles considérés avec $k = 0$, la moyenne des valeurs absolues des erreurs de prévision est réduite à 669.

CONCLUSION

Dans le premier chapitre, un processus de Poisson filtré a été introduit pour modéliser le débit d'un fleuve ou d'une rivière. Une application au fleuve Delaware a permis de tirer les conclusions suivantes. Bien que la fonction de réponse

$$w\left(t, \tau_n, Y_n\right) = Y_n e^{-(t-\tau_n)/c}$$

soit simple, elle ne témoigne pas fidèlement de la réalité. Il semble donc plus approprié d'utiliser une fonction de réponse du type

$$w\left(t, \tau_n, Y_n\right) = Y_n (t-\tau_n)^k e^{-(t-\tau_n)/c},$$

où k est une constante positive ou égale à zéro. Dans le cas du fleuve Delaware, il est apparu que $1/2$ pour valeur de k donnait un meilleur ajustement du modèle. Lorsqu'il s'est agi de prédire le débit du fleuve une journée après la dernière observation de ce même débit, il est vite apparu qu'à toute fin pratique seul le modèle de base, pour lequel $k = 0$, conduisait à des formules utilisables. En fait, cela provient des relevés hydrographiques eux-mêmes où seuls les débits sont enregistrés et non pas les données relatives aux événements de précipitations, c'est-à-dire les variables τ_n et Y_n. Pourtant, s'il était possible de connaître exactement ces variables plutôt que d'avoir à les estimer, il est fort probable que le modèle proposé conduirait à de bonnes estimations. Néanmoins, des modèles efficaces pour des prévisions à court terme existent, par exemple celui de la régression linéaire. Il serait intéressant de comparer ces modèles à celui étudié dans ce chapitre.

En ce qui concerne le paramètre k, il faudrait déterminer un moyen de l'estimer. Si la valeur de k est grande, arrondir à l'entier le plus proche ne devrait pas résulter en une perte de précision du modèle ou d'efficacité pour les prévisions. L'espérance conditionnelle $E\left[X(t+1) | A(t)\right]$ devient alors une formule exacte. Toutefois, pour de faibles valeurs de k, il devient impératif d'évaluer le paramètre le plus précisément possible.

Pour sa part, le modèle introduit au chapitre 2, dérivé du processus de Poisson filtré, peut servir de modèle approximatif ou de modèle exact selon la situation. L'estimateur du débit du lendemain de l'observation la plus récente a été grandement amélioré. Pour des raisons de simplicité, seul le cas avec $k = 0$ et $X(0) = 0$ a été utilisé à cette fin puisque celui-ci utilise directement la valeur $X(t)$. Dans le cas contraire, lorsque $k > 0$, tout comme dans le premier chapitre, l'estimateur requiert la connaissance des instants d'arrivée des événements ainsi que l'amplitude des signaux qui leur sont associés. Aussi, le débit d'un fleuve ne descend jamais sous un certain seuil. Ce dernier pourrait être la valeur $X(0)$ du modèle général. Pour revenir au cas cité, il suffit de définir le processus $X^*(t) = X(t) - X(0)$.

Finalement, un modèle qui serait en quelque sorte un amalgame des précédents serait celui qui ne tiendrait en compte que les événements s'étant produits au plus s unités de temps avant l'instant t. Il s'agirait en clair du processus de Poisson filtré défini par

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} w\left(t, \tau_n, Y_n\right) g(t, \tau_n) \quad (Z(t) = 0 \text{ si } N(t) = 0),$$

où $g(t, \tau_n)$ est une fonction indicatrice telle que

$$g(t, \tau_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } t - \tau_n \in [0, s] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

DEUXIÈME PARTIE

Une version discrète du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

INTRODUCTION

Soit $X(t)$ une chaîne de Markov pour laquelle les déplacements ont lieu à toutes les Δt unités de temps. Lorsque le processus est dans l'état x, il se déplace de Δx avec une probabilité de $\theta(x)$ et de $-\Delta x$ avec une probabilité de $\phi(x)$. Il demeure à la position x avec une probabilité de $1 - \theta(x) - \phi(x)$. En définissant la moyenne et la variance infinitésimales par les équations suivantes :

$$\beta(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E\left[\{X(t+\Delta t) - X(t)\}\,|X(t) = x\right]}{\Delta t}$$

et

$$\alpha(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Var\left[\{X(t+\Delta t) - X(t)\}\,|X(t) = x\right]}{\Delta t},$$

et en posant que $(\Delta x)^2 = A\Delta t$, où A est une constante telle que $\alpha(x) < A$ pour tout x, si

$$\theta(x) = \frac{1}{2A}\left(\alpha(x) + \beta(x)\Delta x\right) \quad \text{et} \quad \phi(x) = \frac{1}{2A}\left(\alpha(x) - \beta(x)\Delta x\right),$$

alors la chaîne de Markov converge, lorsque Δx et Δt tendent vers zéro, vers un processus de diffusion dont les paramètres infinitésimaux sont $\beta(x)$ et $\alpha(x)$ (Cox et Miller, 1965, p. 213-15).

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus de diffusion tel que $\beta(x) = -cx$, où $c > 0$, et $\alpha(x) \equiv 1$, c'est-à-dire qu'un tel processus $X(t)$ est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX(t) = -cX(t)dt + dW(t)$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien standard. Il s'ensuit, en choisissant 2 pour valeur de A, que

$$\theta(x) = \frac{1}{4}(1 - cx\Delta x) \quad \text{et} \quad \phi(x) = \frac{1}{4}(1 + cx\Delta x)$$

de sorte que $1 - \theta(x) - \phi(x) = 1/2$. En outre, lorsque $c = 1$, la probabilité que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont le point de départ x_0 est situé dans l'intervalle $(-b, a)$ atteigne la frontière a avant la frontière $-b$ est donnée par (Cox et Miller, 1965, p. 234)

$$\pi_+(x_0) = \frac{\int_{-b}^{x_0} e^{x^2} dx}{\int_{-b}^{a} e^{x^2} dx}. \tag{21}$$

À présent, soit la chaîne de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ dont l'espace des états est l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ et dont le point de départ $X_0 = i$ est l'un des points de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N-1\}$. Sont définis

$$p_{i,i+1} = \frac{1}{4}(1 - ci), \quad p_{i,i-1} = \frac{1}{4}(1 + ci) \quad \text{et} \quad p_{i,i} = \frac{1}{2}, \tag{22}$$

les probabilités que la chaîne de Markov passe de l'état i à l'état $i+1$ et de l'état i à l'état $i-1$ respectivement, tandis que $p_{i,i}$ est la probabilité que le processus demeure dans l'état i. La notation utilisée est équivalente à la précédente dans ce sens que $p_{i,i+1}$ pourait être représenté par θ_i et $p_{i,i-1}$ par ϕ_i. Afin de satisfaire à la condition selon laquelle $p_{i,j} \in [0, 1]$ $\forall i, j$, c est un paramètre positif qui doit être tel que

$$c < \frac{1}{N-1}.$$

Il s'agit en clair d'une discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Différentes versions discrètes du processus d'Ornstein-Uhlenbeck ont été étudiées par divers auteurs. Particulièrement, Larralde (2004 a,b) a étudié le processus à temps discret

$\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ pour lequel

$$X_{n+1} = \gamma X_n + Y_{n+1} \quad (X_0 = x_0)\,, \tag{23}$$

où les variables Y_{n+1} sont indépendantes, identiquement distribuées et de moyenne zéro. L'auteur a calculé la probabilité que le processus $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$, dont le point de départ est $X_0 = 0$, atteigne la partie négative de l'axe pour la première fois à la n^e transition. Une expression exacte fut obtenue dans le cas où la distribution des variables Y_n est donnée par

$$f_{Y_n}(y) = \frac{1}{2} e^{-|y|}$$

pour $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

D'autres auteurs, parmi lesquels se trouvent Renshaw (1997), Anishchenko *et al.* (2002), Bourlioux *et al.* (2002), Sprott (2003), Kontoyiannis et Meyn (2005) ainsi que Milstein *et al.* (2007), ont aussi introduit des versions discrètes du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Dans plusieurs cas, les variables Y_n suivent une loi normale $N(0, \sigma^2)$.

Le problème considéré dans cette thèse correspond au problème introduit par Larralde (2004 a,b) (se référer à l'équation (23)) avec $\gamma = 1$ et

$$Y_{n+1} = \begin{cases} -1 \text{ avec une probabilité } p_{X_n, X_{n-1}}, \\ 0 \text{ avec une probabilité } 1/2, \\ 1 \text{ avec une probabilité } p_{X_n, X_{n+1}} \end{cases}$$

où $X_n \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$. Dans le prochain chapitre, une expression pour l'endroit de premier passage sera obtenue, c'est-à-dire qu'une expression pour

$$p_i := P\left[X_\tau = N \,|X_0 = i\right], \tag{24}$$

où

$$\tau := \inf\{n > 0 : X_n = 0 \quad \text{ou} \quad N\}$$

et $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ sera donnée. À la section 3.2, le problème sera généralisé par l'étude d'une chaîne de Markov asymétrique $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ dont l'espace des états est l'ensemble $S := \{-M, \ldots, 0, \ldots, N\}$ et dont les probabilités de transition varieront selon que le processus sera dans la partie positive ou négative de l'axe.

Finalement, soit

$$D_i := E\left[\tau | X_0 = i\right]$$

le nombre moyen de transitions requises pour que X_n atteigne l'une ou l'autre des frontières 0 ou N, étant donné que $X_0 = i$. Une expression pour cette valeur sera donnée au chapitre 4.

CHAPITRE 3

ENDROIT DE PREMIER PASSAGE

3.1 La chaîne de Markov initiale

En ayant défini p_i comme étant la probabilité que X_n atteigne la frontière N avant 0, étant donné que $X_0 = i$, p_i satisfait à l'équation aux différences linéaire suivante :

$$p_i = \frac{(1-ci)}{4} p_{i+1} + \frac{(1+ci)}{4} p_{i-1} + \frac{1}{2} p_i$$

pour $i = 1, \ldots, N-1$, sous les conditions aux frontières

$$p_0 = 0 \text{ et } p_N = 1.$$

Cette même équation peut être réécrite comme suit :

$$p_i = \frac{(1-ci)}{2} p_{i+1} + \frac{(1+ci)}{2} p_{i-1} \tag{25}$$

et en posant $x = i - 1$ et $y(x) = p_{i-1}$, l'équation (25) devient

$$\left[\frac{1-c(x+1)}{2}\right] y(x+2) - y(x+1) + \left[\frac{1+c(x+1)}{2}\right] y(x) = 0$$

pour $x \in \Xi := \{0, \ldots, N-2\}$ sous les conditions aux frontières $y(0) = 0$ et $y(N) = 1$. L'équation précédente est une équation aux différences *hypergéométrique*, sa solution s'exprimant en fonction de séries hypergéométriques (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 556) :

$$F[\alpha, \beta, \gamma, z] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!},$$

où z est une variable complexe et où

$$(\vartheta)_n := \vartheta(\vartheta+1)\cdot\ldots\cdot(\vartheta+n-1) \quad \text{et} \quad (\vartheta)_0 = 1$$

est le symbole de Pochhammer. Sous sa *forme normale*, une équation aux différences linéaire hypergéométrique s'écrit :

$$(x+\beta_1+\beta_2+2)\,y(x+2) - [(\rho_1+\rho_2)(x+1)+\beta_1\rho_2+\beta_2\rho_1]\,y(x+1)+\rho_1\rho_2 xy(x) = 0,$$

où $x' = x+\beta_3$ (et en laissant tomber le prime). Dans le présent problème (se référer à Batchelder, 1967, p. 68-69),

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = -1, \quad \beta_1 = -1 \quad \beta_2 = -1-\frac{2}{c} \text{ et } \beta_3 = 1+\frac{1}{c}$$

et ainsi

$$(x-a)\,y(x+2) + ay(x+1) - xy(x) = 0, \tag{26}$$

avec

$$a := \frac{2}{c},$$

est l'équation devant être résolue. En clair, l'équation (26) a été obtenue en faisant subir une translation au repère de telle sorte que $x \in \Xi + \beta_3$. La forme normale est celle utilisée pour la suite. Cette équation homogène admet pour système fondamental de solutions (Batchelder, 1967, p. 68-126) :

$$y_1(x) = \gamma_1 \in \mathbb{R}$$

et

$$y_2(x) = (-1)^x \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right].$$

La dernière solution est analytique pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf possiblement pour $x = 0, -1, \ldots$ où la fonction $\Gamma(x)$ possède des pôles de premier ordre, cela en vertu de l'énoncé suivant (Erdélyi *et al.*, 1953, p. 68) :

Proposition 17 *$F[\alpha,\beta,\gamma,z_0]/\Gamma(\gamma)$ est une fonction analytique entière de α, β, γ si z_0 est fixé et tel que $|z_0|<1$, puisque la série hypergéométrique converge alors uniformément dans chaque domaine fini de l'espace (complexe) α, β, γ.*

De façon équivalente, bien que la fonction $F[\alpha,\beta,\gamma,z_0]$ puisse être divergente lorsque $\gamma=-m$, $m\in\mathbb{N}$, (c'est-à-dire lorsque α ou β ne sont pas égales à $-n$, $n\in\mathbb{N}$ avec $n<m$), $F[\alpha,\beta,\gamma,z_0]/\Gamma(\gamma)$ est partout analytique puisque la fonction $1/\Gamma(\gamma)$ possède des zéros de premier ordre en ces points.

Remarque 18 *La solution $y_2(x)$, bien qu'analytique pour tout x réel à l'exception possible des points $x=0,-1,...$, est une fonction à valeurs complexes, sauf si x est un entier. En effet,*

$$(-1)^x = e^{i\pi x}$$

est égal à 1 ou -1 uniquement lorsque x est égal à $2k$ ou $2k+1$, avec k entier. Pour avoir une fonction à valeurs réelles, il suffira de prendre le facteur $(-1)^{[x]}$ à la place de $(-1)^x$, où $f(x)=[x]$ est la fonction partie entière de x. Une autre façon d'obtenir une fonction à valeurs réelles consisterait à prendre la partie réelle de $y_2(x)$, ce qui équivaudrait à remplacer le facteur $(-1)^x$ par cos (πx).

Pour la chaîne de Markov avec frontières en 0 et en N, puisque $x=i+1+1/c$, $x>N$. En effet, la condition selon laquelle $c<1/(N-1)$ entraîne que

$$x=i+1+\frac{1}{c}>i+1+N-1=i+N.$$

De même,

$$x-a=i+1-\frac{1}{c}<i+1-(N-1)=i+2-N.$$

Donc, si l'espace des états est $\{0,1,\ldots,N\}$,

$$x-a<2.$$

La solution $y_2(x)$, évaluée au point $1 + a/2$, c'est-à-dire en $i = 0$, s'exprime de la façon suivante (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 557) :

$$y_2\left(1+\frac{a}{2}\right) = (-1)^{1+\left[\frac{a}{2}\right]}\,\frac{a}{2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(a/2\right)}{\Gamma\left(1/2-a/2\right)}. \tag{27}$$

Il en résulte que

$$y_2\left(1+\frac{a}{2}\right) = 0 \tag{28}$$

lorsque $c = 2/\left[2\left(N+n\right)-1\right],\ n \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'un cas limite lorsque $c = 1/(N+n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ce dernier cas est d'analyse plus délicate pour des raisons qui seront ultérieurement exposées. Pour toutes les autres valeurs de c, la proposition suivante est maintenant démontrée.

Proposition 19 *La solution générale de (26), sous les conditions $y\left(1+a/2\right) = 0$ et $y\left(N+1+a/2\right) = 1$, lorsque $c \neq 1/(N+n)$, $n \in \mathbb{N}$, s'écrit comme suit (où $p_i = y\left(i+1+1/c\right)$) :*

$$y\left(x\right) = \gamma_1 + \gamma_2\left(-1\right)^{[x]}\frac{\Gamma\left(x\right)}{\Gamma\left(x-a\right)}F\left[-a,1,x-a,\frac{1}{2}\right], \qquad \gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R},$$

où,

$$\gamma_2 = \left(-1\right)^{\left[\frac{a}{2}\right]}\left\{\frac{a}{2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(a/2\right)}{\Gamma\left(1/2-a/2\right)} - \left(-1\right)^N\frac{\Gamma\left(N+1+a/2\right)}{\Gamma\left(N+1-a/2\right)}F\left[-a,1,N+1-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right]\right\}^{-1}$$

et

$$\gamma_1 = \gamma_2\left(-1\right)^{\left[\frac{a}{2}\right]}\frac{a}{2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(a/2\right)}{\Gamma\left(1/2-a/2\right)}.$$

Particulièrement, lorsque $c = 2/\left[2(N+j)-1\right]$, les constantes γ_1 et γ_2 deviennent

$$\gamma_1 = 0 \quad et \quad \gamma_2 = \left(-1\right)^N\frac{\Gamma\left(N+1-a/2\right)}{\Gamma\left(N+1+a/2\right)F\left[-a,1,N+1-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right]}.$$

Exemple 20 *Soit la chaîne de Markov pour laquelle $N = 4$ et $c = 3/11$. À l'espace des états $\{0,1,2,3,4\}$ correspond, dans le repère translaté, les points $\left\{\frac{14}{3},\frac{17}{3},\frac{20}{3},\frac{23}{3},\frac{26}{3}\right\}$. La* *solution, exprimée dans le repère translaté, est donnée par*

$$y(x) = \gamma_1 + \gamma_2 (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x - \frac{22}{3}\right)} F\left[-\frac{22}{3}, 1, x - \frac{22}{3}, \frac{1}{2}\right],$$

où

$$\gamma_2 = \left\{ \frac{\Gamma(26/3)}{\Gamma(4/3)} F\left[-\frac{22}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right] - \frac{11}{3}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(11/3)}{\Gamma(-19/6)} \right\}^{-1}$$

et

$$\gamma_1 = -\frac{11}{3}\gamma_2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(11/3)}{\Gamma(-19/6)}.$$

Il en ressort que

$$p_0 = y\left(\frac{14}{3}\right) = 0, \quad p_1 = y\left(\frac{17}{3}\right) = \frac{5}{341},$$

$$p_2 = y\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{55}{1364}, \quad p_3 = y\left(\frac{23}{3}\right) = \frac{87}{682} \quad \textit{et} \quad p_4 = y\left(\frac{26}{3}\right) = 1.$$

Définition 21 *(Batchelder, 1967, p. 121) Une équation aux différences linéaire et à coefficients rationnels est dite réductible si elle a une solution commune avec une équation du même type d'ordre inférieur.*

Dans le cas présent, l'équation aux différences hypergéométrique est réductible lorsqu'elle possède une solution qui satisfait à l'équation aux différences d'une fonction gamma, soit l'équation linéaire

$$z(x+1) - r(x)\, y(x) = 0,$$

où $r(x)$ est une fonction rationnelle.

En construisant la forme normale, les constantes $\beta_1 = -1$ et $\beta_2 = -1 - 2/c$ ont été introduites.

Théorème 22 *(Batchelder, 1967, p. 123) Une condition nécessaire et suffisante pour que la forme normale soit une équation réductible est que, ou bien β_1 soit un entier, ou bien β_2*

soit un entier. Si β_1 et β_2 sont tous les deux des entiers positifs (incluant zéro) ou négatifs, alors l'équation est complèment réductible.

Ainsi, l'équation considérée est au moins réductible puisque $\beta_1 = -1$. Elle est complètement réductible lorsque

$$c = \begin{cases} \frac{1}{N+n}, & n \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{2(N+n)-1}, & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où $\mathbb{N}$ inclut zéro. En effet,

$$\beta_2 = -1 - \frac{2}{c} = -k, \quad k \in \mathbb{N} \backslash \{0\},$$

entraîne que

$$\frac{2}{k-1} = c < \frac{1}{N-1}.$$

Il faut donc que $k \geq 2N$. Ainsi,

$$c = \frac{2}{2N-1}, \frac{2}{2N}, \frac{2}{2N+1}, \frac{2}{2N+2}, \cdots$$

Or, sous cette condition de réductibilité, $y_2(x)$ devient, avec $a = m \geq 2N-1$ (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 561) :

$$\begin{aligned} y_2(x) &= (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-m)} F\left[-m, 1, x-m, \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{(-1)^{[x]}}{x} \sum_{n=0}^{m} \left\{ \frac{(-m)_n}{2^n} \prod_{j=0}^{m-n} (x-j) \right\} \\ &= (-1)^{[x]} \sum_{n=0}^{m} \left\{ \frac{(-m)_n}{2^n} (x-m+n)_{m-n} \right\} \\ &= (-1)^{[x]} P_m(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{m}\left\{\frac{(-m)_n}{2^n}\prod_{j=0}^{m-n}(x-j)\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{m}\left\{\frac{(-m)_n}{2^n}(x-m+n)_{m-n}\right\} \end{aligned}$$

est un polynôme de degré m en x. Le polynôme $P_m(x)$ peut être réexprimé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{m!}{x}\left(\frac{-1}{2}\right)^m\sum_{n=0}^{m}\left\{\frac{(-2)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n}(x-j)\right\} && (29) \\ &= \frac{m!}{x}\left(\frac{-1}{2}\right)^m\sum_{n=0}^{m}(-2)^n\frac{x^{(n+1)}}{n!}, && (30) \end{aligned}$$

$x^{(k)} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$, pour un certain k entier naturel, étant le *polynôme factoriel.* La solution réduite précédente satisfait à l'équation générale

$$(x-m)\,y(x+2)+my(x+1)-xy(x)=0, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{31}$$

Les deux exemples qui suivent en sont la vérification lorsque $m=1$ et lorsque $m=2$.

Exemple 23 *Si* $m=1$*,*

$$\begin{aligned} y_2(x) &= (-1)^{[x]}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-1)}F\left[-1,1,x-1,\frac{1}{2}\right] \\ &= (-1)^{[x]}\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{2}\right)\sum_{n=0}^{1}\left\{\frac{(-2)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n}(x-j)\right\} \\ &= \frac{(-1)^{[x]+1}}{2x}\{x-2x(x-1)\} \\ &= (-1)^{[x]}\left\{x-\frac{3}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Cette équation de degré un satisfait bien à l'équation aux différences quel que soit x*. Particulièrement,* $y_2(1) = y_2(2) = 1/2$*.*

Exemple 24 *Si* $m = 2$,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-2)} F\left[-2, 1, x-2, \frac{1}{2}\right] \\ &= (-1)^{[x]} \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{2} \left\{ \frac{(-2)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n} (x-j) \right\} \\ &= (-1)^{[x]} \left\{ x^2 - 4x + \frac{7}{2} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui est un polynôme de degré deux. Si $x = 1, 2$ *ou* 3, $y_2(x) = -1$. *Lorsqu'introduite dans l'équation (31) avec* $m = 2$, *cette solution conduit à la valeur zéro, quel que soit* x.

Particulièrement, la forme réduite de $y_2(x)$ satisfait à l'équation (26) relative à la chaîne de Markov lorsque $c = 2/\left[2(N+n) - 1\right], n \in \mathbb{N}$ (second cas réductible).

Exemple 25 *Lorsque* $N = 2$ *et* $c = \frac{2}{3}$, $x \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right\}$ *et la solution* $y_2(x)$ *s'écrit :*

$$y_2(x) = (-1)^{[x]} \left(x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 17x - \frac{45}{4} \right).$$

Avec $\gamma_2 = \frac{2}{9}$,

$$y(x) = \frac{2}{9}(-1)^{[x]} \left(x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 17x - \frac{45}{4} \right).$$

En résolvant le système d'équations linéaires, il s'en suit que $p_1 = \frac{1}{6}$. *Cette valeur correspond bien à* $y\left(\frac{7}{2}\right)$.

Exemple 26 *Lorsque* $N = 4$ *et* $c = \frac{2}{7}$, $m = 7$ *et alors*

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{(-1)^{[x]}}{4} \\ &\quad \times \left(4x^7 - 126x^6 + 1624x^5 - 11025x^4 + 42196x^3 - 89964x^2 + 97296x - \frac{80325}{2} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que pour l'ensemble des points $\left\{\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}\right\}$ *et avec les conditions aux* *frontières* $y(\frac{9}{2}) = 0$ *et* $y(\frac{17}{2}) = 1$,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{4}{37485}(-1)^{[x]} \\ &\times \left(4x^7 - 126x^6 + 1624x^5 - 11025x^4 + 42196x^3 - 89964x^2 + 97296x - \frac{80325}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$p_0 = y\left(\frac{9}{2}\right) = 0, \quad p_1 = y\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{5}{476},$$

$$p_2 = y\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{7}{238}, \quad p_3 = y\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{141}{1428} \quad et \quad p_4 = y\left(\frac{17}{2}\right) = 1.$$

Les valeurs obtenues à partir de la solution sont bien celles obtenues en résolvant un système d'équations linéaires défini à partir de l'équation (25).

Si la forme réduite de $y_2\left(x\right)$ est satisfaisante pour le second cas réductible, elle ne conduit pas aux bons résultats lorsqu'il s'agit de la chaîne de Markov avec $c = 1/(N+n)$, $n \in \mathbb{N}$, à savoir, le premier cas de réductibilité. L'exemple suivant le confirme.

Exemple 27 *Si l'espace des états de la chaîne de Markov est* $\{0,1,2,3\}$ *et* $c = 1/3$, *alors* $x \in \{4,5,6,7\}$ *et* $m = 6$. *La solution* $y_2(x)$ *s'écrit alors*

$$y_2\left(x\right) = (-1)^{[x]}\left\{x^6 - 24x^5 + \frac{455}{2}x^4 - 1080x^3 + 2674x^2 - 3216x + \frac{5715}{4}\right\}.$$

Cette équation satisfait bien, pour tout x, *à l'équation (31) avec* $m = 6$. *Cependant, pour* $x \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $y_2\left(x\right) = -45/4$, *ce qui ne peut conduire aux bonnes valeurs des probabilités. En effet, en résolvant directement l'équation (25),* $p_1 = 1/13$ *et* $p_2 = 3/13$, *lesquelles probabilités sont différentes.*

Lemme 28 *Soit n un entier plus grand ou égal à zéro et θ un nombre réel différent de zéro. Alors, avec la convention selon laquelle $\sum_{\vartheta=0}^{-1} f(\vartheta) = 0$,*

$$\sum_{\vartheta=0}^{n}\left\{\frac{\theta^{\vartheta}}{\vartheta!}\prod_{\gamma=0}^{\vartheta}(n-\gamma)\right\} = \sum_{\vartheta=0}^{n-1}\left\{\frac{\theta^{\vartheta}}{\vartheta!}\prod_{\gamma=0}^{\vartheta}(n-\gamma)\right\} = (1+\theta)^{n-1} n.$$

Preuve. L'équation est vraie si $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, il suffit de voir que

$$\prod_{\gamma=0}^{\vartheta}(n-\gamma) = (-1)^{\vartheta} n (1-n)_{\vartheta}$$

et d'écrire que

$$\begin{aligned}
\sum_{\vartheta=0}^{n}\left\{\frac{\theta^{\vartheta}}{\vartheta!}\prod_{\gamma=0}^{\vartheta}(n-\gamma)\right\} &= \sum_{\vartheta=0}^{n-1}\left\{\frac{\theta^{\vartheta}}{\vartheta!}\prod_{\gamma=0}^{\vartheta}(n-\gamma)\right\} \\
&= \sum_{\vartheta=0}^{n-1}\left\{\frac{\theta^{\vartheta}}{\vartheta!}(-1)^{\vartheta} n (1-n)_{\vartheta}\right\} \\
&= n\sum_{\vartheta=0}^{n-1}\left\{\frac{(-\theta)^{\vartheta}}{\vartheta!}(1-n)_{\vartheta}\right\} \\
&= nF[1-n,\beta,\beta,-\theta]
\end{aligned}$$

pour un certain β convenablement choisi. Or, (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 559)

$$nF[1-n,\beta,\beta,\theta] = (1+\theta)^{n-1} nF[\beta+n-1,0,\beta,-\theta] = (1+\theta)^{n-1} n.$$

■

Remarque 29 *La somme précédente s'identifie directement avec le développement du binôme puisque pour $\vartheta \leq n-1$,*

$$(1-n)_{\vartheta} = (-1)^{\vartheta}\frac{(n-1)!}{(n-1-\vartheta)!}$$

et donc
$$\sum_{\vartheta=0}^{n-1}\left\{\frac{(-\theta)^{\vartheta}}{\vartheta!}(1-n)_{\vartheta}\right\}=\sum_{\vartheta=0}^{n-1}\theta^{\vartheta}\binom{n-1}{\vartheta}=(1+\theta)^{n-1}.$$

Proposition 30 *Lorsque $a = m$ est un entier naturel, la solution $y_2(k) = (-1)^{m+1}\frac{m!}{2^m}$, si $k = 1, 2, ..., m+1$.*

Preuve. Le polynôme $P_m(x)$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
P_m(x) &= \frac{(-m)_0}{2^0}(x-m)_m+\frac{(-m)_1}{2^1}(x-m+1)_{m-1}+\ldots+\frac{(-m)_m}{2^m}\\
&= \prod_{j=1}^{m}(x-j)+\frac{(-m)_1}{2^1}\prod_{j=1}^{m-1}(x-j)+\ldots+\frac{(-m)_{m-1}}{2^{m-1}}(x-1)+\frac{(-m)_m}{2^m}\\
&= \prod_{j=1}^{m}(x-j)-\frac{m}{2^1}\prod_{j=1}^{m-1}(x-j)+\ldots+\frac{(-1)^{m-1}}{2^{m-1}}\frac{m!}{1!}(x-1)+\frac{(-1)^m}{2^m}\frac{m!}{0!}
\end{aligned}$$

puisque pour $n\in\mathbb{N}$, $n\le m$,

$$(-m)_n=(-1)^n\frac{m!}{(m-n)!}.$$

Donc,
$$2^mP_m(x)=2^m\prod_{j=1}^{m}(x-j)-m2^{m-1}\prod_{j=1}^{m-1}(x-j)+\ldots+(-1)^m\frac{m!}{0!}.$$

À présent, si $k=1,2,\ldots,m+1$, par le lemme précédent

$$2^mP_m(k)=\frac{(-1)^m m!}{k}\sum_{\vartheta=0}^{k-1}\frac{(-2)^{\vartheta}}{\vartheta!}\prod_{j=0}^{\vartheta}(k-j)=(-1)^{m+k+1}m!,$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}
y_2(k) &= (-1)^kP_m(k)\\
&= \frac{(-1)^{m+2k+1}m!}{2^m}.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 31 *Le polynôme $P_m(x)$ possède exactement m zéros dans l'intervalle $(1, m+1)$.*

Preuve. Cela découle directement de la proposition précédente ainsi que du théorème des valeurs intermédiaires. ■

Ainsi, pour le premier cas de réductibilité, c'est-à-dire lorsque $c = 1/(N+n)$, $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_m(x)$ ne peut conduire aux bonnes valeurs des probabilités. En effet, $x = i + (N+n)$, $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$, est un entier et la solution $y_2(x)$, restreinte à ces points, est constante. Dans la théorie générale des équations aux différences, une équation du second ordre et non homogène s'écrit de la façon suivante :

$$z(x+2) + p(x)z(x+1) + q(x)z(x) = r(x). \tag{32}$$

Le théorème d'existence et d'unicité s'énonce ainsi (Brand, 1966, p. 361) :

Théorème 32 *Si les fonctions $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ sont définies sur l'ensemble*

$$S = \{\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots\},$$

alors il existe une solution unique $z(x)$ sur S sous les conditions $z(\alpha) = z_0$ et $z(\alpha+1) = z_1$.

En écrivant l'équation (26) sous la forme (32), il ressort que

$$p(x) = \frac{a}{(x-a)} \quad \text{et} \quad q(x) = -\frac{x}{(x-a)}, \quad a = \frac{2}{c}. \tag{33}$$

Ces deux fonctions ont donc une singularité en $x = a$. Or, $x - a = 0$ si, et seulement si, $i + 1 - 1/c = 0$, ce qui ne peut se produire que lorsque $c = 1/(N+n)$, $n \in \mathbb{N}$, cela au point $i = N + n - 1$.

Remarque 33 *Pour le second cas de réductibilité, lorsque $c = 2/[2(N+n) - 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $x = i + (N+n) + 1/2$ n'est un entier pour aucun i. La fonction $y_2(x)$ ne prend donc pas toujours la même valeur pour ces valeurs de x.*

Ainsi la solution générale $y(x)$ ne peut être utilisée directement pour obtenir la valeur p_i lorsque $c = 1/(N+n)$, $n \in \mathbb{N}$. Cependant, puisque $y_2(x)$ est une fonction continue de c, il suffit de prendre la limite lorsque c tend vers cette valeur pour obtenir la valeur recherchée. Il est ici préférable de travailler directement dans le repère non translaté.

Remarque 34 *La fonction valeur entière $f(x) = [x]$ possède une limite en x_0 si, et seulement si, x_0 n'est pas un entier. Pour obtenir la limite de $y_2(x)$ lorsque c tend vers $1/(N+n)$, $n \in \mathbb{N}$, il est nécessaire d'évaluer préalablement le facteur $(-1)^{i+1+\left[\frac{1}{c}\right]}$ au point c.*

Exemple 35 (Premier cas réductible) *En reprenant l'exemple 27 où N était égal à 3 et c à $1/3$, et en exprimant la solution dans le repère de départ,*

$$p_i = \lim_{c \to \frac{1}{3}} \left\{ \gamma_1 + \gamma_2 (-1)^i \frac{\Gamma(i+1+1/c)}{\Gamma(i+1-1/c)} F\left[-\frac{2}{c}, 1, i+1-\frac{1}{c}, \frac{1}{2}\right] \right\}, \qquad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},$$

où

$$\gamma_2 = -\left\{ \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/c)}{c\Gamma(1/2-1/c)} + \frac{\Gamma(4+1/c)}{\Gamma(4-1/c)} F\left[-\frac{2}{c}, 1, 4-\frac{1}{c}, \frac{1}{2}\right] \right\}^{-1}$$

et

$$\gamma_1 = -\gamma_2 \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/c)}{c\Gamma(1/2-1/c)}.$$

Maintenant, $p_1 = 1/13$ et $p_2 = 3/13$ comme il se doit.

Dans la prochaine section, l'espace des états de la chaîne de Markov est prolongé à l'ensemble $\{-M, \ldots, 0, \ldots, N\}$. Le cas asymétrique y est analysé.

3.2 Endroit de premier passage pour la chaîne de Markov asymétrique

Le problème jusqu'à maintenant considéré est ici généralisé par une chaîne de Markov $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ dont l'espace des états est l'ensemble

$$S := \{-M, \ldots, 0, \ldots, N\}$$

et pour lequel $M \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Sont aussi définis

$$p_{0,1} = p_0, \quad p_{0,-1} = q_0 \quad \text{et} \quad p_{0,0} = \frac{1}{2}$$

de telle sorte que p_0, $q_0 \in (0,1)$ et $p_0 + q_0 = 1/2$. À l'instar de la section précédente, et lorsque $i \in \{-M+1, \ldots, -1\}$ est négatif, sont définis

$$p_{i,i+1} = \frac{1}{4}(1 - di), \quad p_{i,i-1} = \frac{1}{4}(1 + di) \quad \text{et} \quad p_{i,i} = \frac{1}{2}$$

les probabilités que la chaîne de Markov passe de l'état i à l'état $i+1$ et de l'état i à l'état $i-1$ respectivement, tandis que $p_{i,i}$ est la probabilité que le processus demeure dans l'état i. Aussi, afin de satisfaire à la condition selon laquelle $p_{i,j} \in [0,1]$ $\forall i, j$, d est un paramètre positif qui doit être tel que

$$d < \frac{1}{M-1}.$$

Soit

$$T := \inf \{n > 0 : X_n = -M \quad \text{ou} \quad N\},$$

l'instant de premier passage aux frontières. L'objectif vise maintenant à obtenir une expression pour la probabilité que ce premier passage aux frontières se fasse à la frontière N, à savoir

$$\pi_i := P[X_T = N \,|X_0 = i] \tag{34}$$

pour un certain $i \in S := \{-M+1, \ldots, 0, \ldots, N-1\}$. De toute évidence,

$$\pi_N = 1 \quad \text{et} \quad \pi_{-M} = 0.$$

En dénotant p_i défini en (24) par $p_N(i)$ et en définissant pour $i \in \{-M+1, \ldots, -1\}$

$$p_M(i) := P[X_\sigma = -M \,|X_0 = i],$$

où

$$\sigma := \inf\{n > 0 : X_n = -M \quad \text{ou} \quad 0\},$$

l'expression de $p_M(i)$, sous les contraintes

$$p_M(-M) = 1 \text{ et } p_M(0) = 0,$$

est donnée par la proposition 19, cela en remplaçant c par d et N par $-M$, et les remarques relatives à cette proposition demeurent valables. En utilisant les mêmes notations que dans la section précédente,

$$x = i + 1 + \frac{1}{d} > -M + 1 + M - 1 = 0.$$

À présent, soit les événements

E_i : le processus atteint N avant $-M$ à partir de $i \in S$;

F_i : le processus atteint N avant 0 à partir de $i > 0$;

G_i : le processus atteint $-M$ avant 0 à partir de $i < 0$.

Pour les calculs qui suivent, il est préférable de travailler directement sur l'ensemble S. Aussi,

$$\pi_i \equiv P[E_i].$$

Si i est un entier positif, alors, en conditionnant sur l'événement F_i, il résulte que

$$\begin{aligned} \pi_i &= P[E_i \cap F_i] + P[E_i \cap F_i^c] \\ &= P[E_i \mid F_i] P[F_i] + P[E_i \mid F_i^c] P[F_i^c] \\ &= p_N(i) + P[E_i \mid F_i^c][1 - p_N(i)]. \end{aligned}$$

Or,

$$P[E_i \mid F_i^c] = \frac{1}{2} P[E_i \mid F_i^c] + \pi_1 p_0 + \pi_{-1} q_0.$$

Ainsi,

$$\pi_i = p_N\,(i) + 2\,[1 - p_N\,(i)]\,[\pi_1 p_0 + \pi_{-1} q_0]\,. \tag{35}$$

De façon similaire, lorsque i est un entier négatif, en conditionnant sur l'événement G_i,

$$\begin{aligned}\pi_i &= P\,[E_i \cap G_i] + P\,[E_i \cap G_i^c] \\ &= P\,[E_i \cap G_i^c] \\ &= P\,[E_i \mid G_i^c]\,P\,[G_i^c] \\ &= 2p_M(i)\,[\pi_1 p_0 + \pi_{-1} q_0]\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Remplacer i par 1 dans l'équation (35) et i par -1 dans l'équation (36) conduit au système d'équations linéaires pour π_1 et π_{-1} :

$$\begin{aligned}\pi_1 &= p_N\,(1) + 2\,[1 - p_N\,(1)]\,[\pi_1 p_0 + \pi_{-1} q_0] \\ \pi_{-1} &= 2p_M(-1)\,[\pi_1 p_0 + \pi_{-1} q_0]\,. \end{aligned}$$

La proposition suivante est maintenant démontrée.

Proposition 36 *La probabilité π_i définie en (34) est donnée, lorsque $i > 0$, par (35) et par (36), lorsque $i < 0$, avec*

$$\pi_1 = \frac{p_N\,(1)\,[1 - q_0 p_M\,(-1)]}{1 - 2q_0 p_M(-1) - 2p_0\,[1 - p_N\,(1)]}$$

et

$$\pi_{-1} = \frac{2p_0 p_M\,(-1)\,p_N\,(1)}{1 - 2q_0 p_M(-1) - 2p_0\,[1 - p_N\,(1)]}.$$

Remarque 37 *i) Lorsque $p_0 = q_0 = 1/4$, les expressions de π_1 et π_{-1} se réduisent à*

$$\pi_1 = \frac{p_N\,(1)\,[2 - p_M\,(-1)]}{1 - p_M(-1) + p_N\,(1)} \quad et \quad \pi_{-1} = \frac{p_M\,(-1)\,p_N\,(1)}{1 - p_M(-1) + p_N\,(1)}.$$

En outre, si la chaîne de Markov est symétrique, c'est-à-dire si $M = N$ *et* $c = d$*, alors, par symétrie,* $p_M(-1) = p_N(1)$ *et donc*

$$\pi_1 = p_N(1)\left[2 - p_N(1)\right] \quad et \quad \pi_{-1} = p_N^2(1).$$

ii) De toute évidence, la probabilité

$$\nu_i := P\left[X_T = -M \mid X_0 = i\right]$$

est donnée par $1 - \pi_i$*,* $i \in \{-M+1, \ldots, 0, \ldots, N-1\}$.

Au chapitre 4, l'espérance du temps nécessaire, c'est-à-dire le nombre de transitions requises, pour que la chaîne de Markov atteigne l'une ou l'autre des frontières 0 ou N, partant du point i, est calculée.

CHAPITRE 4

MOYENNE DU TEMPS DE PREMIER PASSAGE POUR LA CHAÎNE DE MARKOV

En ayant défini D_i comme étant le nombre moyen de transitions pour que le procesus X_n atteigne l'une ou l'autre des frontières, sachant que $X_0 = i$, cela conduit à résoudre l'équation

$$\frac{1}{2}D_i = \frac{(1-ci)}{4}D_{i+1} + \frac{(1+ci)}{4}D_{i-1} + 1,$$

laquelle est équivalente à

$$\frac{(1-ci)}{2}D_{i+1} - D_i + \frac{(1+ci)}{2}D_{i-1} = -2 \tag{37}$$

pour $i = 1, \ldots, N-1$, sous les conditions aux frontières

$$D_0 = 0 \quad \text{et} \quad D_N = 0.$$

En posant $x = i - 1$ et $y(x) = D_{i-1}$, l'équation (37) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{[1 - c\,(x+1)]}{2}y(x+2) - y(x+1) + \frac{[1 + c\,(x+1)]}{2}y(x) = -2, \tag{38}$$

pour $x = 0, 1, \ldots, N-2$, sous les conditions aux frontières $y\,(0) = 0$ et $y\,(N) = 0$.

Sous forme normale, l'équation (38) est la suivante :

$$(x-a)\,y\,(x+2) + ay\,(x+1) - xy\,(x) = \vartheta, \qquad \vartheta \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

sous les conditions aux frontières

$$y\left(1 + \frac{a}{2}\right) = y\left(N + 1 + \frac{a}{2}\right) = 0 \tag{40}$$

et où la constante $\vartheta = 2a$. À l'image des équations différentielles ordinaires, la solution d'une équation aux différences inhomogène est la somme de la solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière. Or, la solution de l'équation homogène associée a été obtenue au chapitre précédent. Il s'agira donc, dans ce chapitre, de déterminer une solution particulière $y_p(x)$. Afin d'atteindre cet objectif, une méthode similaire à la méthode de la variation de la constante pour les équations différentielles ordinaires est ici employée. La contante c est ici réputée être différente de $1/(N+n)$, $n \in \mathbb{N}$, la solution pour ces valeurs de c étant obtenue, à l'instar du chapitre précédent, en prenant la limite sur c.

Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ forment un système fondamental de solutions pour l'équation homogène associée, alors la solution particulière est donnée par (Brand, 1966, p. 369 ou Batchelder, 1967, p. 13)

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x),$$

où

$$\Delta c_n(x) = \frac{M_{2n}(x)}{D(x+1)} \frac{\vartheta}{(x-a)}, \quad n = 1, 2$$

et où $M_{2n}(x)$ est le cofacteur du deuxième élément dans la n^e colonne de $D(x+1)$, $D(x)$ étant le déterminant de Casorati. Or,

$$D(x+1) = \begin{vmatrix} 1 & y_2(x+1) \\ 1 & y_2(x+2) \end{vmatrix}$$

et ainsi

$$\Delta c_1(x) = -\frac{y_2(x+1)}{D(x+1)} \frac{\vartheta}{(x-a)}, \tag{41}$$

$$\Delta c_2(x) = \frac{1}{D(x+1)} \frac{\vartheta}{(x-a)}. \tag{42}$$

Pour la suite, il faut considérer que

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(w)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Gamma(\epsilon + z)}{\Gamma(\epsilon + w)},$$

c'est-à-dire que le quotient des fonctions gamma inclut aussi des cas ou celui-ci n'est pas défini. Par exemple, bien que le quotient $\Gamma(0)/\Gamma(-2)$ ne soit pas défini, il est possible, en regard de la définition précédente, d'écrire

$$\frac{\Gamma(0)}{\Gamma(-2)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Gamma(\epsilon+0)}{\Gamma(\epsilon-2)} = \lim_{\epsilon \to 0} (\epsilon-1)(\epsilon-2) = 2!.$$

Cela permet de déterminer une correspondance entre le symbole de Pochhammer et les fonctions gamma :

$$\begin{aligned} (z)_n &= \begin{cases} 1 \quad si \quad n=0, \\ \prod_{m=0}^{n-1} (z+m) \quad si \quad n=1,2,\ldots \end{cases} \\ &= \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \end{aligned}$$

Lemme 38 *Lorsque* $c-a \neq 0$ *et* $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} F[a,1,c+1,z] &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+1)} \frac{1}{z} \{1+(z-1)F[a,1,c,z]\} \\ &= \frac{(c)_1}{z(c-a)_1} \{1+(z-1)F[a,1,c,z]\}. \end{aligned}$$

Preuve. Le résultat découle directement de la relation de Gauss pour les fonctions contiguës suivante (Abramowitz et Stegun, 1965, p.558) :

$$c(1-z)F[a,b,c,z] - cF[a,b-1,c,z] + (c-a)zF[a,b,c+1,z] = 0,$$

et de la définition des fonctions hypergéométriques

$$F[a,b,c,z] = 1 + \frac{ab}{c \cdot 1} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1) \cdot 1 \cdot 2} z^2 + \cdots,$$

laquelle entraîne que $F[a,0,c,z] \equiv 1$. ■

Proposition 39 *Si* $\prod_{m=0}^{n-1}(c+m-a) \neq 0$ *et* $z \neq 0$, *alors*

$$\begin{aligned}
F[a,1,c+n,z] &= \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c-a+n)}\frac{(z-1)^{n-1}}{z^n} \\
&\quad \times \left\{\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}(z-1)F[a,1,c,z] + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(c-a+m)}{\Gamma(c+m)}\frac{z^m}{(z-1)^m}\right\} \\
&= \frac{(c)_n}{(c-a)_n}\frac{(z-1)^{n-1}}{z^n}\left\{(z-1)F[a,1,c,z] + \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(c-a)_m}{(c)_m}\frac{z^m}{(z-1)^m}\right\}.
\end{aligned}$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence. Le résultat est vrai pour $n = 1$ en vertu du lemme précédent. En supposant que le résultat soit vrai pour n,

$$\begin{aligned}
F[a,1,c+1+n,z] &= \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c+1)}\frac{\Gamma(c+1-a)}{\Gamma(c+1-a+n)}\frac{(z-1)^n}{z^n}F[a,1,c+1,z] \\
&\quad + \frac{(z-1)^{n-1}}{z^n}\frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c+1-a+n)}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(c+1-a+m)}{\Gamma(c+1+m)}\frac{z^m}{(z-1)^m} \\
&= \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c+1)}\frac{\Gamma(c+1-a)}{\Gamma(c+1-a+n)}\frac{(z-1)^n}{z^n} \\
&\quad \times \left\{\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c)}\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+1)}\frac{1}{z}\left[1+(z-1)F[a,1,c,z]\right]\right\} \\
&\quad + \frac{(z-1)^{n-1}}{z^n}\frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c+1-a+n)}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(c+1-a+m)}{\Gamma(c+1+m)}\frac{z^m}{(z-1)^m},
\end{aligned}$$

la dernière égalité suivant du lemme 38. Il résulte de cette écriture, en multipliant et en réexprimant les termes, que

$$\begin{aligned}
F[a,1,c+1+n,z] &= \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c)}\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+n+1)}\frac{(z-1)^{n+1}}{z^{n+1}}F[a,1,c,z] \\
&\quad + \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c)}\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+n+1)}\frac{(z-1)^n}{z^{n+1}} \\
&\quad + \frac{(z-1)^{n-1}}{z^n}\frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c+1-a+n)}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(c+1-a+m)}{\Gamma(c+1+m)}\frac{z^m}{(z-1)^m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+n+1)} \frac{(z-1)^{n+1}}{z^{n+1}} F[a,1,c,z] \\
&\quad + \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+n+1)} \frac{(z-1)^{n}}{z^{n+1}} \\
&\quad + \frac{(z-1)^{n-1}}{z^{n}} \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c+1-a+n)} \sum_{m=1}^{n} \frac{\Gamma(c-a+m)}{\Gamma(c+m)} \frac{z^{m-1}}{(z-1)^{m-1}} \\
&= \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+n+1)} \frac{(z-1)^{n+1}}{z^{n+1}} F[a,1,c,z] \\
&\quad + \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+n+1)} \frac{(z-1)^{n}}{z^{n+1}} \\
&\quad + \frac{(z-1)^{n}}{z^{n+1}} \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c+1-a+n)} \sum_{m=1}^{n} \frac{\Gamma(c-a+m)}{\Gamma(c+m)} \frac{z^{m}}{(z-1)^{m}} \\
&= \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+n+1)} \frac{(z-1)^{n+1}}{z^{n+1}} F[a,1,c,z] \\
&\quad + \frac{(z-1)^{n}}{z^{n+1}} \frac{\Gamma(c+1+n)}{\Gamma(c+1-a+n)} \sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(c-a+m)}{\Gamma(c+m)} \frac{z^{m}}{(z-1)^{m}}.
\end{aligned}$$

Le résulat est donc aussi vrai pour $n+1$. ■

Remarque 40 *Cette formule est valable pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$ si l'on adopte la convention selon laquelle $\sum_{m=0}^{-1} f_m = 0$.*

De la proposition 39 découle le corollaire suivant.

Corollaire 41 *Lorsque $c - a \neq 0, -1$ et $z \neq 0$,*

$$\begin{aligned}
F[a,1,c+2,z] &= \frac{\Gamma(c+2)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a+2)} \frac{(z-1)}{z^2} \{1 + (z-1) F[a,1,c,z]\} \\
&\quad + \frac{\Gamma(c+2)}{\Gamma(c+1)} \frac{\Gamma(c-a+1)}{\Gamma(c-a+2)} \frac{1}{z} \\
&= \frac{(c)_2}{(c-a)_2} \frac{(z-1)}{z^2} \{1 + (z-1) F[a,1,c,z]\} + \frac{(c+1)_1}{(c+1-a)_1 z}.
\end{aligned}$$

Preuve. La preuve est immédiate. ■

À présent, pour l'équation considérée dans ce chapitre, le déterminant de Casorati s'écrit :

$$\begin{aligned}
D(x) &= \begin{vmatrix} 1 & y_2(x) \\ 1 & y_2(x+1) \end{vmatrix} \\
&= y_2(x+1) - y_2(x) \\
&= (-1)^{[x]+1} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-a)} F\left[-a, 1, x+1-a, \frac{1}{2}\right] \\
&\quad - (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

et, par le lemme 38,

$$\begin{aligned}
D(x) &= (-1)^{[x]+1} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-a)} \\
&\quad \times \left\{ -\frac{\Gamma(x-a+1)}{\Gamma(x-a)} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right] + 2 \frac{\Gamma(x-a+1)}{\Gamma(x-a)} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} \right\} \\
&\quad + (-1)^{[x]+1} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right] \\
&= (-1)^{[x]+1} F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right] \left\{ -\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} + \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} \right\} + (-1)^{x+1} 2 \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} \\
&= 2(-1)^{[x]+1} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)}.
\end{aligned}$$

Le déterminant n'est donc jamais nul si $c \neq 1/(N+n),\ \ n \in \mathbb{N}$. Évalué au point $x+1$, le déterminant de Casorati devient

$$D(x+1) = 2(-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-a)}$$

et, de l'équation (42),

$$\begin{aligned}
\Delta c_2(x) &= \frac{(-1)^{[x]}}{2} \frac{\Gamma(x+1-a)}{\Gamma(x+1)} \frac{\vartheta}{(x-a)} \\
&= (-1)^{[x]} \frac{\vartheta}{2} \frac{\Gamma(x-a)}{\Gamma(x+1)}.
\end{aligned}$$

Remarque 42 *Lorsque*

$$\frac{1}{c} = N + n - \frac{1}{2},$$

x n'est pas un entier et le déterminant de Casorati n'est jamais nul sur l'espace des x, comme il se doit. Dans ce cas, si $m = 2/c$,

$$\Delta c_2(x) = (-1)^{[x]} \frac{\vartheta}{2} \prod_{j=0}^{m} (x - j)^{-1}.$$

Toutefois, si

$$\frac{1}{c} = N + n,$$

$D(x)$ est un polynôme de degré $m = 2(N + n)$, nul sur l'ensemble $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ mais non nul sur l'ensemble $\mathbb{N} \backslash S$, c'est-à-dire à droite de la singularité $x = m$.

Une somme inverse d'une fonction $f(x)$ est connue toutes les fois que l'une ou l'autre des séries formelles suivantes converge (Batchelder, 1967, p.6 ou Nörlund, 1927, p.13) :

$$-\sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n).$$

Or, celles-ci sont généralement divergentes. Elles permettent toutefois de démontrer la proposition suivante.

Proposition 43 *Soit*

$$f(x) = \eta^x \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)}.$$

Alors, partout où

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Gamma(x+\epsilon+\alpha)}{\Gamma(x+\epsilon+\beta)}$$

existe,

$$\Delta^{-1} f(x) = -\eta^x \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)} F[x+\alpha, 1, x+\beta, \eta]$$

ou, de façon équivalente,

$$\Delta^{-1}f(x) = -\frac{\eta^x}{(1-\eta)}\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)}F\left[\beta-\alpha, 1, x+\beta, \frac{\eta}{\eta-1}\right]$$

pourvu que $\eta < 1$ ou pourvu que $\beta - \alpha > 1$ si $\eta = 1$. Pour la seconde équation, η doit être strictement inférieur à un.

Preuve. Par les sommes formelles,

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}f(x) &= -\eta^x \sum_{n=0}^{+\infty} \eta^n \frac{\Gamma(x+n+\alpha)}{\Gamma(x+n+\beta)}\frac{\Gamma(n+1)}{n!} \\ &= -\eta^x \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)} F[x+\alpha, 1, x+\beta, \eta].\end{aligned}$$

Par la proposition 17, cette fonction est une fonction analytique entière lorsque $|\eta| < 1$. La série demeure convergente lorsque $\eta = 1$ si $\beta - \alpha > 1$. En outre, par prolongement analytique, cette équation est valable pour tout $\eta < 1$ et peut alors être écrite comme suit (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 558) :

$$\Delta^{-1}f(x) = -\frac{\eta^x}{(1-\eta)}\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)}F\left[\beta-\alpha, 1, x+\beta, \frac{\eta}{\eta-1}\right],$$

laquelle fonction est analytique entière pour tout $\eta < 1$. ■

Remarque 44 *Lorsque $\eta < 0$, il est préférable de prendre la valeur entière de x et d'écrire $\eta^{[x]}$ plutôt que η^x de façon à n'avoir que des valeurs réelles.*

Remarque 45 *Dans la théorie générale des équations aux différences linéaires, une équation homogène du second ordre peut s'écrire comme suit :*

$$z(x+2) + p(x)\,z(x+1) + q(x)\,z(x) = 0.$$

En définissant

$$Q(x) = \prod_{t=\alpha}^{x-1} q(t), \quad Q(\alpha) = 1,$$

où $Q(x)$ est le produit de $x-\alpha$ facteurs $q(t)$, lorsqu'une solution $u(x)$ est connue, une seconde solution $v(x)$ peut être obtenue de telle sorte que $u(x)$ et $v(x)$ forment un système fondamental de solutions, cela par l'équation suivante (Brand, 1966, p. 365) :

$$v(x) = D(\alpha)\, u(x)\, \Delta^{-1}\left(\frac{Q(x)}{u(x)\, u(x+1)}\right),$$

où $D(x)$ est le déterminant de Casorati. Dans le présent problème, la solution $y_1(x) = \gamma_1 \in \mathbb{R}$ est une solution évidente. Aussi,

$$\begin{aligned} Q(x) &= \prod_{t=\beta_3}^{x-1} \frac{(-t)}{t-a} = (-1)^{x-\beta_3} \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(\beta_3 - a)}{\Gamma(\beta_3)\,\Gamma(x-a)} \\ &= C_1 (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)}, \end{aligned}$$

C_1 étant une constante et $Q(\beta_3) = 1$. Par la proposition précédente,

$$v(x) = \Delta^{-1} Q(x) = C_2 (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right], \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

ce qui correspond bien à la solution $y_2(x)$.

À présent, en vertu de la proposition 43, si $c \neq 1/(N+n)$, $\quad n \in \mathbb{N}$,

$$c_2(x) = \frac{\vartheta}{4} (-1)^{[x]+1} \frac{\Gamma(x-a)}{\Gamma(x+1)} F\left[a+1, 1, x+1, \frac{1}{2}\right].$$

Finalement,

$$\begin{aligned} c_2(x)\, y_2(x) &= \frac{\vartheta}{4} (-1)^{[x]+1} \frac{\Gamma(x-a)}{\Gamma(x+1)} F\left[a+1, 1, x+1, \frac{1}{2}\right] \\ &\qquad \times (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right] \\ &= -\frac{\vartheta}{4} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} F\left[a+1, 1, x+1, \frac{1}{2}\right] F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right] \\ &= -\frac{\vartheta}{4x} F\left[a+1, 1, x+1, \frac{1}{2}\right] F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned} \tag{43}$$

Remarque 46 *Dans cette équation, la seconde fonction hypergéométrique est absolument convergente lorsque l'espace des états est* $\{0, 1, \ldots, N\}$ *puisque* $x - 1 > N - 1 > 0$.

Dans le cas particulier où $a = 2(N + n) - 1 := m$ (second cas réductible), $x - a$ n'étant pas un entier relatif (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 561),

$$c_2(x)\, y_2(x) = -\frac{\vartheta}{4x} F\left[a + 1, 1, x + 1, \frac{1}{2}\right] \sum_{n=0}^{m} \frac{(-m)_n}{2^n (x - a)_n}.$$

Le coefficient $\Delta c_1(x)$ s'écrit de la façon suivante (se référer à l'équation (41)) :

$$\begin{aligned}
\Delta c_1(x) &= -\frac{y_2(x+1)}{D(x+1)} \frac{\vartheta}{(x-a)} \\
&= (-1)^{[x]+2} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-a)} F\left[-a, 1, x + 1 - a, \frac{1}{2}\right] \\
&\qquad \times \frac{1}{2} (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x+1-a)}{\Gamma(x+1)} \frac{\vartheta}{(x-a)} \\
&= \frac{1}{2} F\left[-a, 1, x + 1 - a, \frac{1}{2}\right] \frac{\vartheta}{(x-a)},
\end{aligned}$$

laquelle expression peut être réexprimée à l'aide de la fonction gamma comme suit :

$$\Delta c_1(x) = \frac{\vartheta}{2} F\left[-a, 1, x + 1 - a, \frac{1}{2}\right] \frac{\Gamma(x-a)}{\Gamma(x-a+1)}. \tag{44}$$

Les séries formelles ne sont que de peu d'utilité, comme cela est généralement le cas, lorsqu'il s'agit de calculer la somme inverse de $\Delta c_1(x)$. Afin d'obtenir une expression pour $c_1(x)$, il est approprié d'utiliser le théorème fondamental des sommations (se référer à Brand, 1966, p. 349).

Théorème 47 (fondamental) *Si* $\Delta F(x) = f(x)$ *et* $a, b \geq a$ *sont des entiers, alors*

$$\sum_{x=a}^{b} f(x) = \Delta^{-1} f(x)\Big|_a^{b+1} = F(b+1) - F(a).$$

Preuve. Par hypothèse

$$\sum_{x=a}^{b} f(x) = \sum_{x=a}^{b} (F(x+1) - F(x)).$$

Soit $b = a + n$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{x=a}^{a+n} f(x) &= F(a+1) - F(a) \\ &\quad +F(a+2) - F(a+1) \\ &\quad +\ldots \\ &\quad +F(a+n+1) - F(a+n).\end{aligned}$$

Dans cette somme, tous les termes s'annulent sauf le second et l'avant-dernier. ■

Maintenant, puisque

$$\Delta \sum_{t=a}^{x-1} f(t) = \Delta\,[F(x) - F(a)] = f(x),$$

$$\Delta^{-1} f(x) = \sum_{t=a}^{x-1} f(t),$$

avec la convention selon laquelle

$$\sum_{t=a}^{a-1} f(t) = 0 \tag{45}$$

et

$$\sum_{t=a}^{a} f(t) = f(a). \tag{46}$$

À titre d'exemple, si $S(x)$ est la série géométrique, alors

$$S(x) = \sum_{t=0}^{x-1} ar^t = \left.\frac{ar^t}{r-1}\right|_0^x = a\frac{r^x - 1}{r - 1},$$

d'où il ressort que

$$\begin{aligned}\Delta S(x) &= S(x+1) - S(x) \\ &= a\frac{r^{x+1}-1}{r-1} - a\frac{r^x-1}{r-1} \\ &= \frac{ar^x}{r-1}(r-1) = ar^x,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$a\frac{r^x-1}{r-1}$$

est la différence inverse (ou la sommation) de ar^x. De ce principe de sommation et de l'équation (41), de même que de la linéarité de l'opérateur Δ^{-1}, découle que

$$\begin{aligned}c_1(x) &= \frac{\vartheta}{2}\Delta^{-1}\left\{F\left[-a, 1, x+1-a, \frac{1}{2}\right]\frac{\Gamma(x-a)}{\Gamma(x-a+1)}\right\} \\ &= \frac{\vartheta}{2}\sum_{t=\beta_3}^{x-1} F\left[-a, 1, t+1-a, \frac{1}{2}\right]\frac{\Gamma(t-a)}{\Gamma(t-a+1)},\end{aligned}$$

où la série $\sum_{t=\beta_3}^{x-1} f(t)$ est la somme de $x-\beta_3$ éléments, sous la convention (45) et (46). Ainsi, $c_1(x)\, y_1(x) = c_1(x)$ puisque $y_1(x) \equiv 1$. Il s'agit bien d'une différence, la vérification étant immédiate.

Remarque 48 *Une méthode de sommation d'une fonction $f(x)$ consiste à considérer, plutôt que la série formelle $-\sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n)$ qui, tel que mentionné plus haut, diverge généralement, la série (Nörlund, 1927, p. 15)*

$$F_\eta(x) = \int_a^{+\infty} f(x)e^{-\eta x}dx - \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n)e^{-\eta(x+n)},$$

où a est une certaine constante. Si $f(x)$ est une fonction continue pour $x \geq b$ et est telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-\eta x} = 0$$

pour tout $\eta > 0$, alors la série précédente converge pour tout $\eta > 0$. Puisque

$$\Delta F_\eta(x) = f(x)e^{-\eta x},$$

si $F_\eta(x)$ tend uniformément vers une limite lorsque $\eta \to 0$, cette limite est la somme inverse de $f(x)$. Bien que cette méthode soit applicable au cas de $\Delta c_1(x)$, cela ne conduit pas à une expression plus simple pour $c_1(x)$.

Des résultats qui précèdent, et en prenant $\vartheta = 2a$, découle la solution particulière suivante :

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{a}{2x} F\left[a+1, 1, x+1, \frac{1}{2}\right] F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right] \\ &\quad + a \sum_{t=\beta_3}^{x-1} F\left[-a, 1, t+1-a, \frac{1}{2}\right] \frac{\Gamma(t-a)}{\Gamma(t-a+1)}. \end{aligned} \tag{47}$$

Cette équation, évaluée en $1 + a/2$, devient (Abramowitz et Stegun, 1965, p. 557) :

$$\begin{aligned} y_p\left(1+\frac{a}{2}\right) &= -\frac{a}{2(1+a/2)} F\left[a+1, 1, 2+\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right] F\left[-a, 1, 1-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right] - 0 \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2+a/2)}{(1+a/2)} \left\{\frac{1}{\Gamma(1/2+a/2)} - \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(1+a/2)}\right\} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1-a/2)}{\Gamma(1/2-a/2)} \\ &= \frac{\pi a}{2} \left\{\frac{\Gamma(1+a/2)}{\Gamma(1/2+a/2)} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\} \frac{\Gamma(-a/2)}{\Gamma(1/2-a/2)}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$y_p\left(1+\frac{a}{2}\right) = 0$$

lorsque $c = 2/\left[2(N+n)-1\right]$, $n \in \mathbb{N}$. La contante γ_1 doit donc égaler zéro par l'équation (28). La solution générale de (39), sous les conditions aux frontières (40), est maintenant énoncée sous forme de proposition.

Proposition 49 *Le nombre moyen de transitions D_i requises pour que le processus atteigne l'une ou l'autre des frontières est donné par*

$$D_i = y\left(i+1+\frac{1}{c}\right),$$

où

$$y(x) = \gamma_1 + \gamma_2 (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} F\left[-a, 1, x-a, \frac{1}{2}\right] + y_p(x),$$

la fonction $y_p(x)$ étant définie par (47),

$$\gamma_2 = \frac{y_p(1+a/2) - y_p(N+1+a/2)}{y_2(N+1+a/2) - y_2(1+a/2)}$$

et

$$\gamma_1 = -\gamma_2 y_2(1+a/2) - y_p(1+a/2).$$

De plus, $y_2(1+a/2)$ est donnée par (27). Particulièrement, lorsque $c = 2/[2(N+n)-1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_1 = 0 \quad et \quad \gamma_2 = \frac{-y_p(N+1+a/2)}{y_2(N+1+a/2)}.$$

Un seul exemple est ici donné.

Exemple 50 *Lorsque $N = 4$ et $c = 3/11$,*

$$y(x) = \gamma_1 + \gamma_2 (-1)^{[x]} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x - \frac{22}{3}\right)} F\left[-\frac{22}{3}, 1, x - \frac{22}{3}, \frac{1}{2}\right] + y_p(x),$$

où

$$\gamma_2 = \frac{y_p(14/3) - y_p(26/3)}{y_2(26/3) - y_2(14/3)}$$

et

$$\gamma_1 = -\gamma_2 y_2(14/3) - y_p(14/3),$$

avec

$$y_p(14/3) = \frac{11\pi}{3}\left\{\frac{\Gamma(14/3)}{\Gamma(25/6)} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}\frac{\Gamma(-11/3)}{\Gamma(-19/6)},$$

$$y_2(14/3) = \frac{11\sqrt{\pi}}{3}\frac{\Gamma(11/3)}{\Gamma(-19/6)},$$

$$\begin{aligned}
y_p\,(26/3) &= -\frac{11}{26}F\left[\frac{25}{3},1,\frac{29}{3},\frac{1}{2}\right]F\left[-\frac{22}{3},1,\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right] \\
&\qquad + \frac{22}{3}\sum_{t=14/3}^{23/3}F\left[-\frac{22}{3},1,t-\frac{19}{3},\frac{1}{2}\right]\frac{1}{(t-19/3)} \\
&= -\frac{11}{26}F\left[\frac{25}{3},1,\frac{29}{3},\frac{1}{2}\right]F\left[-\frac{22}{3},1,\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right] \\
&\qquad + \frac{22}{3}\sum_{t=0}^{3}F\left[-\frac{22}{3},1,t-\frac{5}{3},\frac{1}{2}\right]\frac{1}{(t-5/3)},
\end{aligned}$$

$$y_2(26/3) = \frac{\Gamma\,(26/3)}{\Gamma\,(4/3)}F\left[-\frac{22}{3},1,\frac{24}{3},\frac{1}{2}\right].$$

CONCLUSION

Dans cette partie fut introduite une chaîne de Markov qui est une discrétisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. D'abord, fut calculée la probabilité que le processus considéré, et dont l'espace des états est $\{0, 1, \ldots, N\}$, atteigne la frontière N avant 0 alors que le point de départ est $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$. Or, en laissant c décroître vers zéro dans l'équation (22), il en résulte que

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad p_{i,i} = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}.$$

La chaîne de Markov est ainsi une marche aléatoire avec une probabilité $p_{i,i} = 1/2$ de demeurer dans son état lors d'une transition. Il serait possible de démontrer que la limite lorsque c décroît vers zéro, c'est-à-dire lorsque $a \to +\infty$, de la solution présentée dans la proposition 19, est la formule connue

$$p_i = \frac{i}{N} \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Dans la section 3.2, des expressions pour la probabilité qu'une chaîne de Markov asymétrique dont l'espace des états est $\{-M, \ldots, 0, \ldots, N\}$ atteigne la frontière N avant $-M$, considérant le point de départ $i \in \{-M+1, \ldots, 0, \ldots, N-1\}$, ont été obtenues. Ce type de chaîne pourrait avoir des applications en mathématiques financières. À titre d'exemple, il est justifié de croire que la valeur d'une action peut varier différemment selon que son cours est haut ou bas. La probabilité que l'action atteigne une certaine valeur avant une autre pourrait ainsi être déterminée. Le point 0 pourrait, dans ce cas, être la valeur médiane de l'action. Ainsi, l'hypothèse selon laquelle les probabilités de transition peuvent différer selon que $X_n > 0$ ou $X_n < 0$ est plausible dans certaines applications.

Au chapitre 4, l'obtention d'une expression pour le nombre moyen de transitions D_i requises pour que le processus atteigne l'une ou l'autre des frontières s'est réalisée en résolvant une équation aux différences hypergéométrique inhomogène. Bien que la solution de l'équation homogène associée ait été obtenue au chapitre 3, il est apparu que déterminer une solution particulière n'était pas chose simple. De toute évidence, à l'instar de la section 3.2, le même type de calculs aurait pu être fait pour le cas d'une chaîne de Markov asymétrique avec espace des états $\{-M, \ldots, 0, \ldots, N\}$. Il est à remarquer que le fait que la chaîne de Markov ait une probabilité de $1/2$ de demeurer dans son état actuel n'influence pas la probabilité d'atteindre la fontière N avant la fontière 0. Toutefois, cela accroît le nombre moyen de transitions requises pour que le processus atteigne l'une ou l'autre des frontières.

Finalement, il serait possible de montrer que la chaîne de Markov converge vers un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. La solution présentée à la proposition 19 devrait ainsi converger vers l'équation (21). En se basant sur les résultats de la section 3.2, cette formule pourrait du coup être généralisée. Cependant, la façon de prendre la limite n'est pas évidente a priori.

BIBLIOGRAPHIE

ABRAMOWITZ, M. et STEGUN, I. A. (1965). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York.

ANISHCHENKO, V. S., ASTAKHOV, V., NEIMAN, A., VADIVASOVA, T. et SCHIMANSKY-GEIER, L. (2007). *Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems*, 2^e éd., Springer, Berlin.

APPELL, P. et KAMPÉ DE FÉRIET, J. (1926). *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynômes d'Hermite*, Gauthier-Villars, Paris.

BATCHELDER, P. M. (1967). *An introduction to linear difference equations*, Dover, New York.

BOURLIOUX, A. (ÉD.), GANDER, M.J. (ÉD.) et SABIDUSSI, G. (ÉD.). (2002). *Modern methods in scientific computing and applications.* Proceedings of the NATO Advanced Study Institute and Séminaire de Mathématiques Supérieures on Modern Methods in Scientific Computing and Applications, Montréal, Québec, Canada, July 9-20, 2001. NATO Science Series II : Mathematics, Physics and Chemistry, Kluwer, Dordrecht.

BRAND, L. (1966). *Differential and difference equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

CLAPS, P., GIORDANO, A. et LAIO, F. (2005). Advances in shot noise modeling of daily streamflows, *Advances in Water Resources*, **28**, p. 992-1000.

COX, D. R. et MILLER, H. D. (1965). *The theory of stochastic processes*, Methuen, Londres.

ERDÉLYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. et TRICOMI, F. G. (1953). *Higher transcendental functions* (Bateman Manuscript Project), Vol. I, McGraw-Hill, New York.

GRADSHTEYN, S. et RYZHIK, I. M. (2000). *Table of integrals, series, and products*, 6^{e} éd. Academic Press, San Diego.

KOCH, R. W. (1985). A stochastic streamflow model based on physical principles, *Water Resources Research*, **21**, p. 545-553.

KONECNY, F. (1992). On the shot noise streamflow model and its applications, *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, **6**, p. 289-303.

KONTOYIANNIS, I. et MEYN, S. P. (2005). Large deviations asymptotics and the spectral theory of multiplicatively regular Markov processes, *Electonic Journal of Probabability,* **10**, p. 61-123.

LARRALDE, H. (2004a). A first passage time distribution for a discrete version of the Ornstein-Uhlenbeck process, *Journal of Physics A, Mathematical and General*, **37**, p. 3759-3767.

LARRALDE, H. (2004b). Statistical properties of a discrete version of the Ornstein-Uhlenbeck process, *Physical Review E*, **69**, 027102 (4 pages).

LEFEBVRE, M. (2003). Short-term hydrological forecasts using linear regression, *Revue des sciences de l'eau*, **16**, p. 255-265.

LEFEBVRE, M. (2005). *Processus stochastiques appliqués.* Hermann, Paris.

LEFEBVRE, M. (2005a). A filtered renewal process as a model for a river flow, *Mathematical Problems in Engineering*, **DOI 10.1155/MPE.2005.49**, p. 49-59.

LEFEBVRE, M. (2006). First passage problems for asymmetric Wiener processes, *Journal of Applied Probability*, **43**, p. 175-184.

LEFEBVRE, M., RIBEIRO, J., ROUSSELLE, J., SEIDOU, O. et LAUZON, N. (2003). Probabilistic prediction of peak flood discharges, dans : DER KIUREGHIAN, A. (ÉD.), MADANAT, S. (ÉD.) et PESTANA, J.M. (ÉD.), *Proceedings of the ICASP9 Conference*, Millpress, Rotterdam, Pays-Bas, p. 867-871.

MILSTEIN, G. N. SCHOENMAKERS, J. G. M. et SPOKOINY, V. (2007). Forward and reverse representations for Markov chains, *Stochastic Processes and their Applications*, **117**, p. 1052-1075.

MURRONE, F., ROSSI, F. et CLAPS, P. (1997). Conceptually-based shot noise modeling of streamflows at short time intervals. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, **11**, p. 483-510.

NÖRLUND, M. N.-E. (1927). *Sur la «somme» d'une fonction*, Gauthier-Villars, Paris.

PARZEN E. (1962). *Stochastic processes*, Holden-Day, San Francisco.

RAHMAN, S., et GRIGORIU, M. (1993). Markov model for seismic reliability analysis of degrading structures, *Journal of Structural Engineering*, **119**, p. 1844-1865.

RENSHAW, E. (1987). The discrete Uhlenbeck-Ornstein process, *Journal of Applied Probability*, **24**, p. 908-917.

ROSS, S. M. (2003). *Introduction to probability models*, 8^e éd. Academic Press, San Diego.

SEIDOU, O., ROUSSELLE, J., LEFEBVRE, M., LAUZON, N. et RIBEIRO, J. (2002). Modélisation de l'incertitude sur les séquences futures de débits en rivières, *Hydrological Science Journal*, **47**, p. 367-385.

SPROTT, J. C. (2003). *Chaos and time-series analysis*, Oxford University Press, Oxford.

WEISS, G. (1977). Shot noise models for the generation of synthetic streamflow data, *Water Resources Research*, **13**, p. 101-108.

YOON, J. et KAVVAS, M. L. (2003). Probabilistic solution to stochastic overland flow equation, *Journal of Hydrologic Engineering*, **8**, p. 54-63.